

THÈSE

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DES MINES DE PARIS**

par

Adinel GAVRUS

en vue de l'obtention du titre de **DOCTEUR** en
SCIENCES ET GENIE DES MATÉRIAUX

IDENTIFICATION AUTOMATIQUE DES PARAMÈTRES RHÉOLOGIQUES PAR ANALYSE INVERSE

soutenue le 30 octobre 1996, devant le jury composé de:

Mr	J. L. CHENOT	PRESIDENT
Mme	M. REYNIER	RAPPORTEUR
Mr	J. C. GELIN	RAPPORTEUR
Mme	E. MASSONI	EXAMINATEUR
Mr	C. DUMONT	EXAMINATEUR
Mr	C. ADAM	EXAMINATEUR

*"Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié
l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître
suffisamment cet animal?"*

Henri Poincaré

REMERCIEMENTS

J'adresse mes remerciements tout d'abord au directeur du Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Mr Jean-Loup Chenot, qui m'accueilli dans son laboratoire. C'est ainsi que, pendant plus de trois ans, j'ai eu le plaisir et le privilège d'enrichir ma formation professionnelle avec une merveilleuse expérience scientifique qui marquera tout mon avenir. Je le remercie aussi d'avoir accepté la présidence du jury.

Mes sincères remerciements vont également à Mme Elisabeth Massoni qui a su diriger cette thèse tout en laissant l'autonomie nécessaire à mon épanouissement. Son esprit de travail et sa motivation constitueront pour toujours un véritable exemple.

Je remercie vivement Mme M. Reynier et Mr J. C. Gelin d'avoir trouver le temps, malgré leurs multiples engagements, de juger ce travail en qualité de rapporteurs.

Un grand merci à MM C. Dumont et C. Adam de bien vouloir participer au jury.

Je ne pourrais oublier ici Mme Noëlle Billon, M. Michel Bellet, M. Pierre Montmitonnet, M. Lionel Fourment, M. Yvan Chastel et M. Gilbert Fiorucci, pour les discussions et leur disponibilité, ainsi que Yannick Tillier et Nathalie Eyssette pour avoir relu une partie de ce document. C'est avec eux que j'ai appris l'esprit de travail en équipe et je leur en suis reconnaissant.

Enfin, je pense à tous mes collègues du CEMEF pour l'ambiance agréable et leur amitié. Qu'ils soient ici remerciés.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
I ESSAIS RHÉOLOGIQUES ET LOIS DE COMPORTEMENT	3
1. Introduction	3
2. Essais rhéologiques	9
3. Méthodes de dépouillements classiques	12
3.1 Analyse graphique-analytique	14
3.2 Méthode de calcul direct de paramètres	15
3.3 Méthode de régression	16
3.4 Synthèse et Conclusions	16
4. Formulation des lois de comportement	18
4.1 Approche phénoménologique	18
4.1.1 Lois multiplicatives simples	21
4.1.2 Lois avec couplage en Z	23
4.1.3 Lois avec couplage microstructural	28
4.1.4 Lois complexes	30
4.2 Synthèse et modèle rhéologique proposé	33
5. Conclusions	34
II L'ANALYSE RHÉOLOGIQUE: UNE APPROCHE DE TYPE INVERSE	37
1. Introduction	37
2. Problèmes inverses	37
3. Mesures expérimentales	42
4. Problème rhéologique direct	43
5. Problème rhéologique inverse	47
5.1 Définition	47
5.2 Formulation de la fonction objectif	50
5.3 Résolution du problème inverse	52
5.3.1 Algorithme de minimisation	53
5.3.2 La méthode de type Gauss-Newton	54
5.3.3 Traitement des contraintes	55
5.3.4 Techniques de régularisation	56

5.3.5 Amélioration du conditionnement de la matrice A	59
5.3.6 Calcul de sensibilité paramétrique	60
5.3.7 Procédure itérative de minimisation	63
5.4 Estimation des paramètres	64
6. Conclusions	65
 III IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES RHÉOLOGIQUES PAR L'ANALYSE INVERSE D'UN MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS	 67
1. Introduction	67
1.1 Généralités	67
1.2 État de l'art	67
1.3 Formulation du problème d'identification	69
2. Modèle direct: simulation éléments finis	71
2.1 Formulation du modèle de calcul	71
2.1.1 Approche cinématique	71
2.1.2 Formulation de la loi constitutive	73
2.1.3 Définition des conditions de contact et de la loi de frottement	74
2.1.4 Formulation faible de l'équilibre mécanique	76
2.1.5 Formulation faible de l'équilibre thermique	78
2.2 Résolution par la méthode des éléments finis	79
2.2.1 Discrétisation temporelle	79
2.2.2 Discrétisation spatiale	79
2.2.3 Formulation discrète de l'équilibre mécanique	81
2.2.4 Formulation discrète de l'équilibre thermique	85
2.2.5 Calcul de la pression nodale	88
2.2.6 Résolution du couplage thermo-mécanique	89
2.2.7 Remaillage et transport des variables	91
2.2.8 Calcul des grandeurs globales caractéristiques des tests rhéologiques ...	92
3. Modèle inverse: calcul de sensibilité	93
3.1 Calcul de la matrice de sensibilité	93
3.2 Calcul de sensibilité nodale	94
3.2.1 Définition et résolution du système de sensibilité	94
3.2.2 Calcul des termes de sensibilité mécaniques	98
3.2.3 Calcul des termes de sensibilité thermiques	100
3.2.4 Transport des variables de sensibilités nodales	103
3.2.5 Synthèse concernant le calcul de sensibilité	105
4. Conclusions	106

IV ANALYSES NUMÉRIQUES	107
1. Introduction	107
2. Test de torsion (logiciel TORRAO)	107
2.1 Test numérique pour le calcul des dérivées	109
2.2 Test de convergence	111
2.2.1 Influence de l'espace expérimental	112
2.2.2 Influence du maillage	113
2.2.3 Influence de l'estimation initiale	114
2.2.4 Influence de la régularisation	117
2.3 Test de stabilité	119
2.3.1 Influence des erreurs de perturbation	119
2.3.2 Influence du nombre de points expérimentaux	120
2.4 Validation	122
3. Test de traction (logiciel TRACTRAO)	128
3.1 Test numérique pour le calcul des dérivées	129
3.2 Test de convergence	130
3.3 Test de stabilité	131
3.4 Validation	132
4. Test de traction-torsion (logiciel TRACTORRAO)	136
4.1 Test de convergence	137
4.2 Test de stabilité	137
5. Conclusions	138
V APPLICATIONS: ANALYSE RHÉOLOGIQUE DES MATÉRIAUX THERMO-VISCOPLASTIQUES	139
1. Introduction	139
2. Acier: XC55	140
3. Alliage d'aluminium: AG5	145
4. Alliage de titane: TA6V	151
5. Polymères solides	155
5.1 Polycarbonate	155
5.2 Polyéthylène	157
6. Conclusions	160
CONCLUSIONS GÉNÉRALES	161
ANNEXES	165
BIBLIOGRAPHIE	181

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Pendant ces dernières années, on constate un développement intensif des logiciels de simulation numérique de problèmes industriels complexes, ayant comme principal objectif la description de plus en plus précise de l'évolution thermo-mécanique des matériaux pendant les procédés de mise en forme. Ces codes de calculs numériques sont ainsi utilisés dans la conception optimale des nouveaux produits et gammes de fabrication, afin de permettre l'augmentation de la qualité des pièces obtenues et la diminution du coût de production.

Pour avoir des résultats de simulations fiables et conformes à la réalité, il faut connaître précisément les données physiques liées aux phénomènes rhéologiques, thermiques et tribologiques. Plus particulièrement, on remarque le besoin en équations de comportement capables de décrire la rhéologie des matériaux dans des conditions proches des conditions réelles: grandes déformations, forte thermo-dépendance, vitesses de déformation élevées. La caractérisation de la rhéologie d'un matériau est devenue ainsi un problème scientifique à part entière. Elle repose sur une formulation adéquate de la loi de comportement, sur une détermination plus précise des paramètres rhéologiques intervenant dans ces lois, et surtout sur une meilleure compréhension des essais rhéologiques de laboratoire. C'est pourquoi nous proposons dans ce document une modélisation plus précise des tests rhéologiques, en utilisant la simulation par éléments finis, permettant une description réaliste des essais, notamment en ce qui concerne la possibilité de prendre en compte les phénomènes d'auto-échauffement et la localisation de la déformation, qui caractérisent les conditions sévères dans lesquelles le comportement doit être étudié.

A partir de cette modélisation nous avons développé une approche de type inverse, résultant du couplage entre le modèle de calcul de l'essai et un module d'identification de paramètres. Le principe de l'identification est de déterminer les coefficients de la loi de comportement qui minimiseront une fonction coût, exprimant l'écart entre le calcul et l'expérience. L'utilisation des algorithmes de minimisation de type gradient nous a amené à développer un calcul de sensibilité paramétrique, en utilisant la méthode de différentiation analytique des équations discrètes définissant le modèle de simulation.

Afin de comprendre les limites des analyses rhéologiques classiques, on consacre *le premier chapitre* à la présentation des principaux essais rhéologiques et à une analyse critique des modèles de dépouillement classiques. Pour mieux mettre en évidence l'utilisation de ces méthodes dans l'étude du comportement rhéologique, on synthétise par la suite l'état de l'art actuel en ce qui concerne la formulation des lois de comportement pour les alliages métalliques.

Dans *le deuxième chapitre* on présente la stratégie générale de la formulation et de la résolution d'un problème d'identification de paramètres rhéologiques, partant d'une approche de type inverse. Les trois éléments de base seront ainsi définis: l'espace expérimental, le modèle direct de calcul et le module d'optimisation de la fonction objectif.

Le troisième chapitre est dédié au développement de l'analyse rhéologique inverse dans le cas particulier où le modèle direct est un code de simulation par éléments finis du test rhéologique. Nous présentons les équations du modèle thermo-mécanique, ainsi que leur discrétisation. Le calcul de sensibilité paramétrique est ensuite détaillé.

Dans *le quatrième chapitre* nous validons notre approche pour les essais de torsion, traction et traction-torsion. On présente ainsi des analyses numériques concernant le calcul des dérivées paramétriques, la convergence et la stabilité du modèle d'identification, ainsi que des comparaisons avec des modèles classiques de calcul des paramètres rhéologiques.

Enfin, dans *le cinquième chapitre* on présente des applications concernant l'analyse rhéologiques des principaux alliages métalliques et des polymères solides.

CHAPITRE 1

ESSAIS RHÉOLOGIQUES ET LOIS DE COMPORTEMENT

1. INTRODUCTION

Pour améliorer la qualité prédictive d'une modélisation numérique de procédés de mise en forme des matériaux, il faut bien connaître le comportement rhéologique dans des conditions de déformations aussi proches que possible des conditions industrielles (grandes déformations, fort gradient thermique, vitesses de déformations élevées). D'un point de vue quantitatif ceci implique une formulation numérique de la loi de comportement associée à l'écoulement plastique. Si on suppose le matériau isotrope, une équation minimale, au sens de son aptitude à décrire, à l'échelle macroscopique, le comportement rhéologique, doit s'écrire sous la forme suivante:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(P, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T) \quad (1.1)$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente, P représente les paramètres scalaires intervenant dans la description analytique, $\bar{\varepsilon}$ la déformation cumulée, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ la vitesse de déformation généralisée et T la température. L'état de contraintes est défini avec le tenseur des contraintes de Cauchy σ , écrit comme la superposition d'un terme déviatorique ou de "cisaillement" s , et d'un terme sphérique représenté par la pression hydrostatique p , sous la forme:

$$\sigma = -pI + s \quad (1.2)$$

Pour exprimer l'intensité de la partie de cisaillement, on définit la contrainte équivalente avec la relation:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (s:s)} \quad (1.3)$$

La déformation équivalente s'exprime à l'aide du tenseur des vitesses de déformation déterminé à partir du champ de vitesse v par:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\text{Grad}(v) + \text{Grad}(v)^T}{2} \quad (1.4)$$

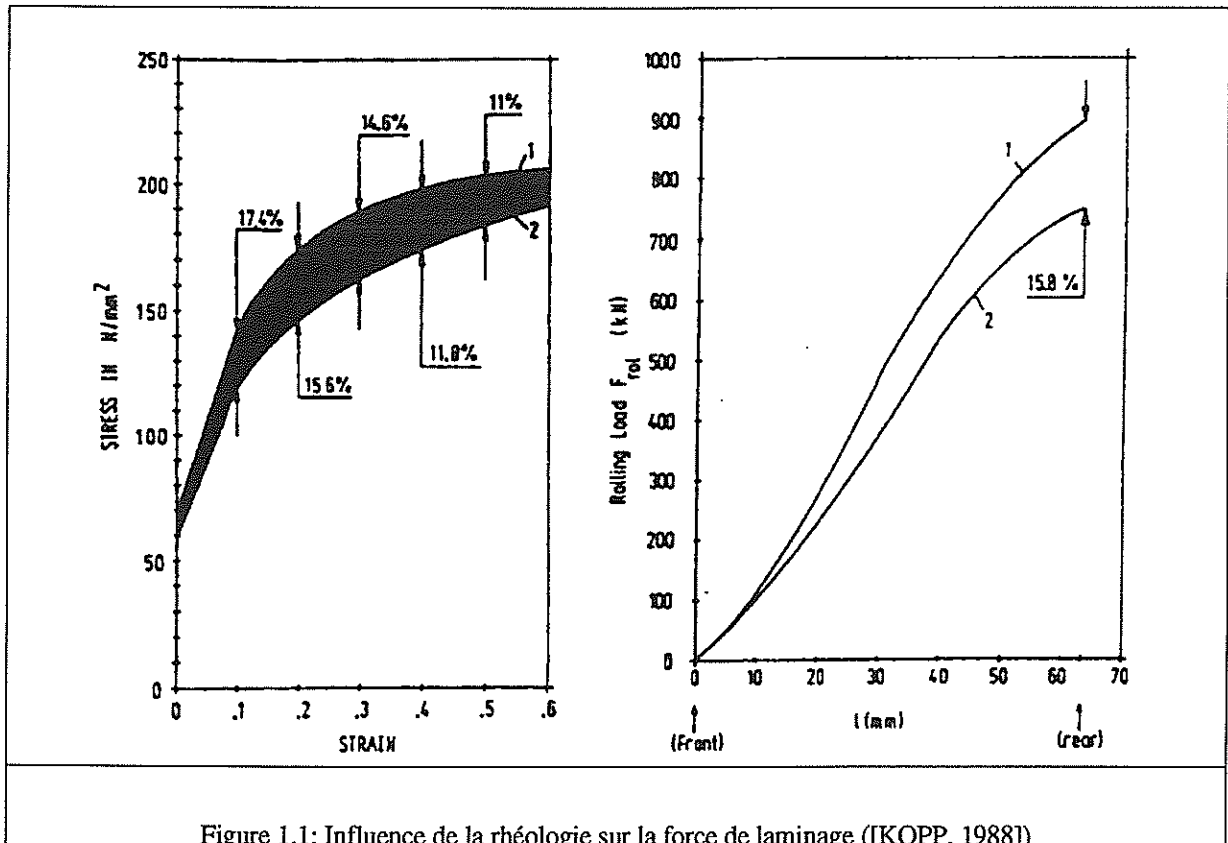
où le symbole T signifie ici la transposée.

On calcule alors la vitesse de déformation généralisée et la déformation équivalente avec les relations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon})} \\ \bar{\epsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}} dt \end{cases} \quad (1.5)$$

L'introduction d'une loi rhéologique dans un code de calcul numérique nécessite la détermination de tous les coefficients intervenant dans sa formulation. Il est donc important de souligner que, pour avoir des prédictions correctes en ce qui concerne la simulation de la déformation, il faut obtenir une précision suffisante sur les valeurs de ces paramètres.

La littérature étudiée montre que plusieurs auteurs ([KOPP, 1988], [HIRT, 1989], [KOPP, 1992], [FORCELLESE, 1992]) ont mis en évidence l'influence de la rhéologie du matériau sur la qualité des prédictions obtenues par la simulation numérique. Par exemple, dans la Figure 1.1 nous voyons l'influence d'une variation de la rhéologie sur le calcul de la force de laminage [KOPP, 1988].



L'influence de la précision d'estimation de la contrainte équivalente d'écoulement est claire: une variation de 15% de cette contrainte conduit à une variation de la force du même ordre de grandeur.

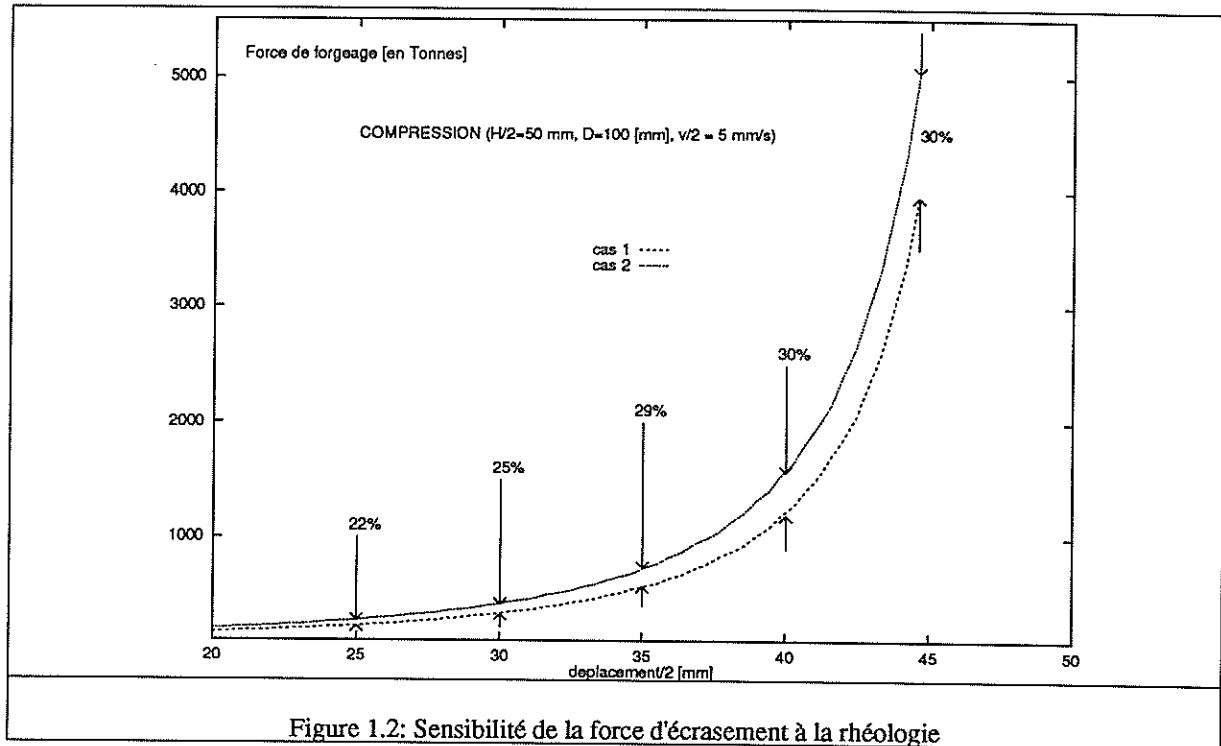
On propose d'étudier l'influence de la rhéologie à l'aide du logiciel FORGE2® développé au CEMEF. Ainsi, on considère la simulation d'une opération de compression à partir d'une loi classique de type Norton-Hoff, définie par:

$$\bar{\sigma} = K_0 \sqrt{3} (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) (\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}})^m \quad (1.6)$$

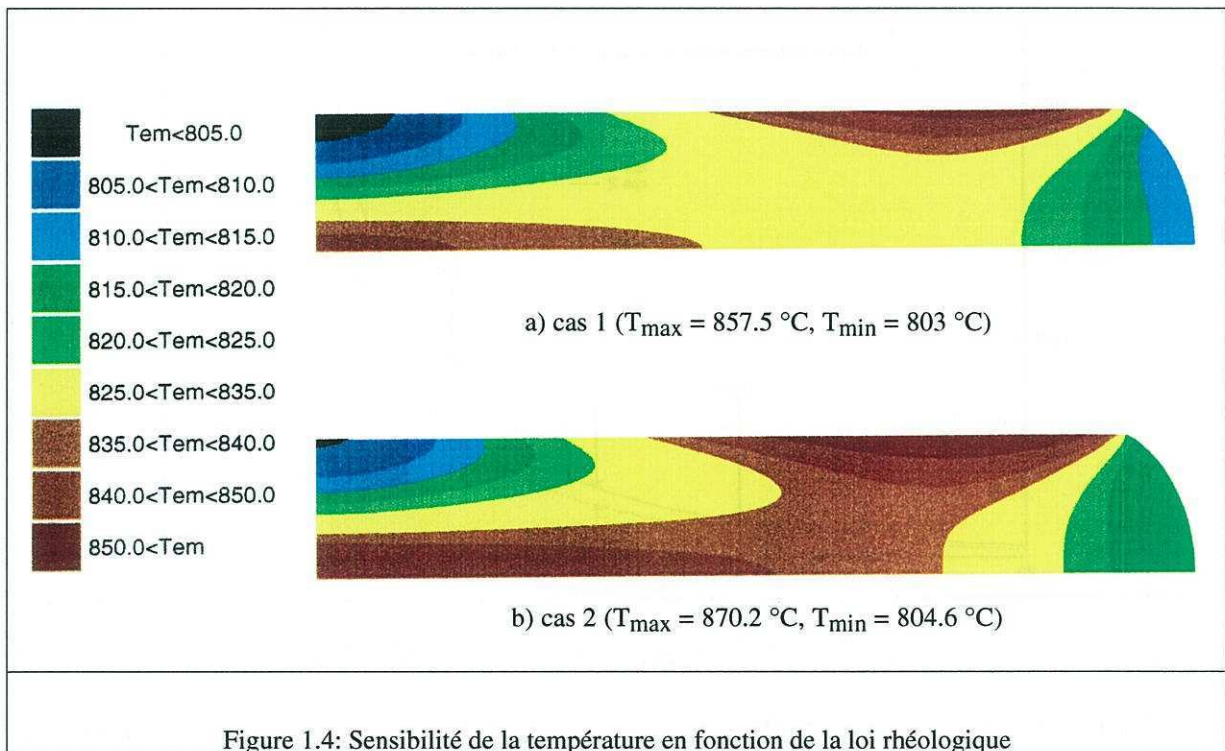
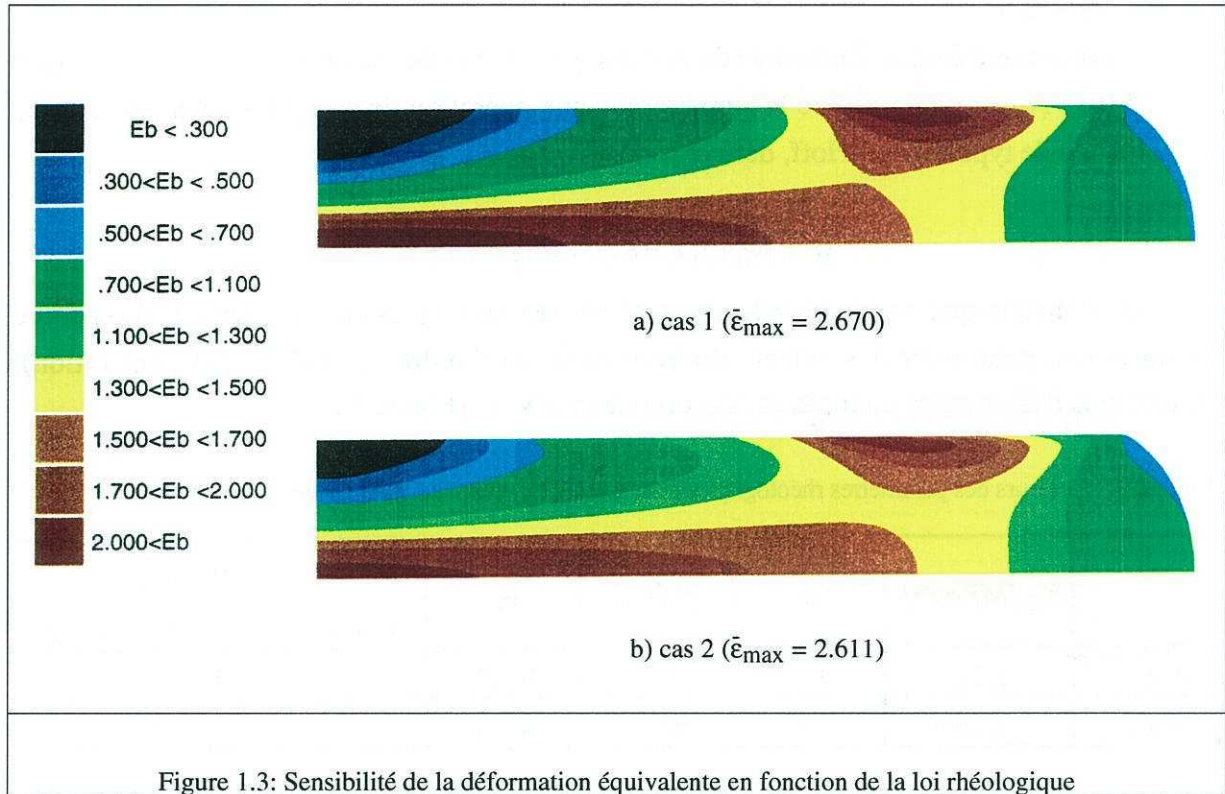
On constate que pour des valeurs rhéologiques assez proches (Tableau 1.1), la force d'écrasement peut avoir des valeurs différentes (écart d'ordre de 30% en fin d'opération), surtout si la déformation du lopin est importante (> 100%) (Figure 1.2).

Tableau 1.1: Valeurs des paramètres rhéologiques pour une loi de type Norton-Hoff sans seuil

	$K_0 [MPa s^m]$	n	$\beta [K]$	m	$\bar{\sigma} [MPa]$ ($\bar{\epsilon} = 1, \dot{\bar{\epsilon}} = 0.1 s^{-1}, T = 1073 [K]$)
cas 1	1.50	0.	4500.	0.25	111.1
cas 2	1.25	0.1	5000.	0.30	135.1



On observe des effets similaires pour les distributions de la déformation équivalente (Figure 1.3) et de la température (Figure 1.4).



C'est la raison pour laquelle, parallèlement aux améliorations récentes des techniques de résolution des codes de calcul numérique, les efforts scientifiques se tournent vers l'accroissement de la fiabilité des lois de comportement.

Le schéma présenté sur la Figure 1.5 montre les principaux éléments du dialogue calcul-expérience, nécessaire non seulement pour valider le modèle numérique, mais aussi pour mieux comprendre l'interdépendance existant entre la simulation par éléments finis, la formulation d'une loi rhéologique et la méthodologie de dépouillement d'un essai rhéologique. Partant des deux structures de base: l'expérience et la simulation numérique, on cherche généralement à valider le modèle de calcul (validation du calcul de simulation éléments finis: VS), et à vérifier la pertinence des valeurs des paramètres utilisés comme données du logiciel (validation des paramètres rhéologiques VP).

La première catégorie de validation consiste à comparer directement les mesures expérimentales (forces, énergies), obtenues à l'aide des tests caractéristiques du procédé de mise en forme (un laminoir à échelle réduite par exemple), avec les résultats de calcul de simulation dans des conditions similaires. Si les comparaisons ne sont pas satisfaisantes, les principales questions reposent sur la précision du module de simulation (v1), ou sur la pertinence de la loi de comportement choisie (v2). Dans ce dernier cas, on doit passer au deuxième type de validation (VP), qui cherche à vérifier la pertinence de la loi constitutive choisie et la fiabilité du calcul des paramètres intervenant dans l'expression de la loi choisie. Cette démarche nécessite évidemment une analyse rigoureuse des essais rhéologiques et de la méthode de dépouillement qui a permis l'obtention des courbes contraintes - déformations. La manière la plus systématique consiste en une simulation par éléments finis de l'essai, pour les mêmes conditions opératoires que l'expérience, et dans une confrontation des grandeurs globales directement accessibles par la mesure (les forces par exemple). Si on constate des écarts importants, on tente de déterminer la cause des erreurs en étudiant trois possibilités:

1° la mise en cause de la méthode de dépouillement (m1). Dans la mesure du possible, on cherche à corriger la géométrie d'éprouvette, les conditions d'essais ou le schéma de calcul.

2° l'introduction d'une méthode d'identification plus performante capable de prendre en compte la complexité de l'essai, par un couplage automatique entre le module de simulation et l'expérience (m2). C'est le principal but de ce travail.

3° la mise en cause de la loi constitutive, donc l'introduction d'autres formulations (m3). Dans ce cas, il faut refaire le calcul d'identification des paramètres, soit en utilisant les modèles classiques de dépouillement, soit à l'aide du module d'identification automatique.

Cette analyse montre la nécessité d'amélioration des études rhéologiques. Avant de développer la procédure automatique d'identification de paramètres, on consacrera ce chapitre à un aperçu des analyses rhéologiques classiques.

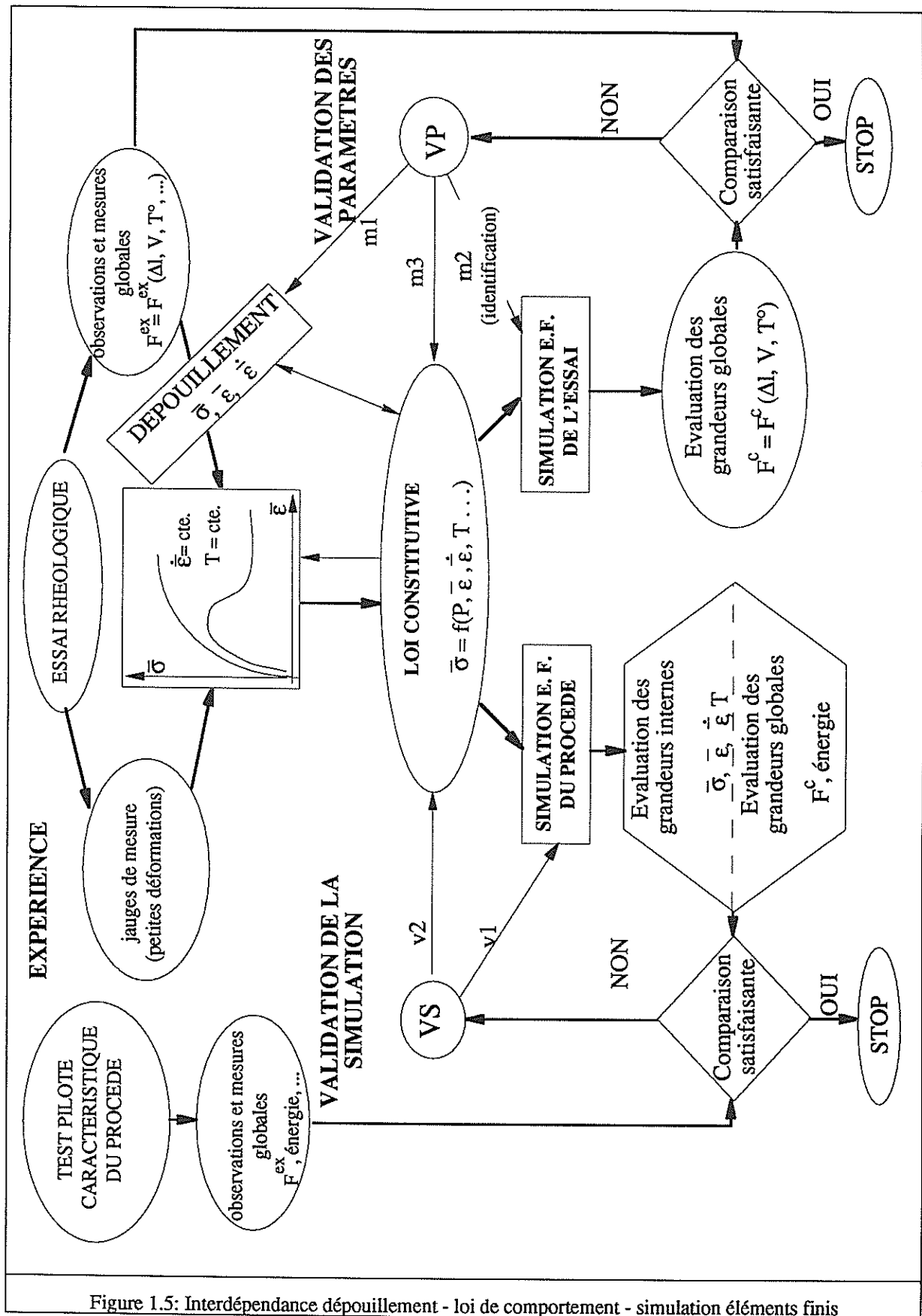


Figure 1.5: Interdépendance dépouillement - loi de comportement - simulation éléments finis

Après un bref rappel des principaux essais rhéologiques et des méthodes de dépouillement classiques, on présentera l'état de l'art actuel en ce qui concerne la formulation d'une loi de comportement de type viscoplastique caractéristique des grandes déformations.

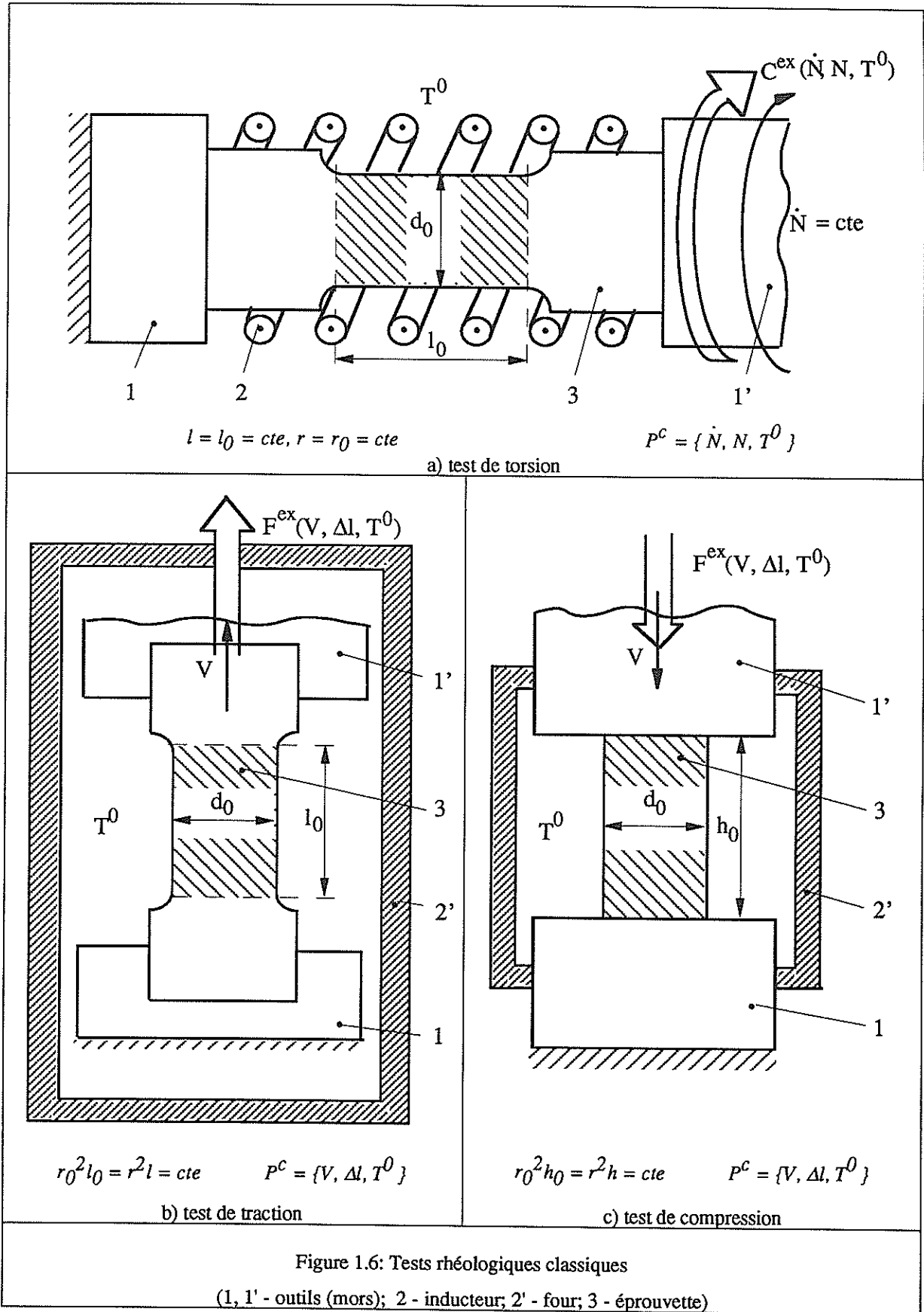
2. ESSAIS RHÉOLOGIQUES

La compréhension du comportement rhéologique d'un corps solide passe par une analyse systématique de la réponse du matériau à des conditions de sollicitations bien précisées. Le but principal est de trouver une relation mathématique intrinsèque permettant d'exprimer la liaison entre le niveau de contrainte moyen $\bar{\sigma}$, et les principales variables d'écoulement comme la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\epsilon}}$, la déformation cumulée $\bar{\epsilon}$ et la température T .

L'expérimentateur doit prendre soin de mettre en évidence les propriétés rhéologiques du matériau par le choix d'un mode de déformation adéquat, permettant le découplage entre le comportement et les autres phénomènes tels que le frottement, l'instabilité mécanique, l'apparition des fissures et de la rupture, le changement de la structure ou les phénomènes chimiques (oxydation). Ainsi les essais mécaniques doivent-ils respecter les critères suivantes:

- (i) mode de déformation aussi proche que possible du mode de déformation du procédé.
- (ii) géométrie d'échantillon choisie de telle sorte que les grandeurs mécaniques puissent être déterminées en tout point.
- (iii) possibilité de conserver constantes le plus de variables possible durant l'essai (par exemple d'avoir des tests à $\dot{\bar{\epsilon}} = cte$ et $T = cte$).
- (iv) possibilité de conserver la stabilité mécanique pour des déformations aussi grandes que possible.
- (v) pour des méthodes d'analyses classiques, la nécessité d'avoir un dépouillement simple avec un minimum d'hypothèses simplificatrices.

Si on s'intéresse aux propriétés liées aux mécanismes de déformations à chaud, les essais rhéologiques conventionnels ([AVENAS, 1976], [CAILLET, 1994]) sont l'essai de torsion simple, l'essai de traction uniaxiale et l'essai de compression. Sur la Figure 1.6 sont présentés d'une façon schématique les principaux tests mécaniques utilisés pour la description du comportement. On voit bien que l'interdépendance sollicitation-comportement-réponses est fortement liée au choix des variables opératoires P^c et des observations expérimentales M^{ex} .



Les observations expérimentales sont, dans le cas du test de torsion, les couples C^{ex} mesurés en fonction du nombre de tours N , pour différentes vitesses de rotation \dot{N} et températures initiales T^0 . Pour le test de traction ou de compression, on mesure la force F^{ex} en fonction du déplacement Δl , pour différentes vitesses de traction V et différentes températures initiales T^0 .

Le choix d'un test rhéologique est principalement fait en fonction des ordres de grandeur de la déformation et de la vitesse de déformation qui caractérisent le procédé de mise en forme que l'on veut étudier. Ainsi sur la Figure 1.7 on présente la correspondance entre le type d'essai et les valeurs des principales variables de déformation.

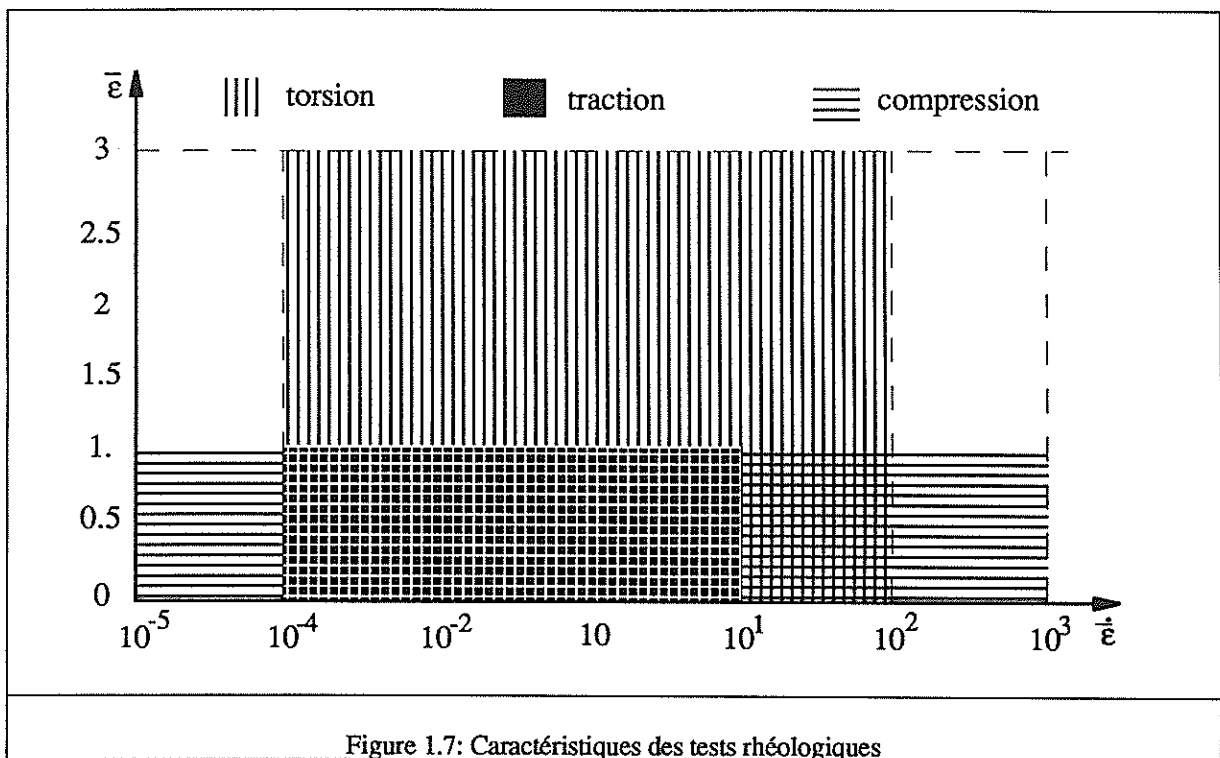


Figure 1.7: Caractéristiques des tests rhéologiques

Pour une analyse du comportement aux très grandes déformations ($\bar{\epsilon} \rightarrow 3$) et dans des conditions plus proches d'un cisaillement, le test de torsion est le mieux adapté, puisqu'il impose un mode de très faible triaxialité. La seule limitation est imposée par la vitesse maximale de rotation admissible par la machine (par exemple 20 s^{-1} ou 100 s^{-1}) et par d'éventuelles instabilités thermiques qui se traduisent par une localisation de la déformation. Pour des études à grandes vitesses de déformations (500 s^{-1}), le test le plus utilisé est le test de compression (à la presse ou au pilon). Les principaux inconvénients sont liés au phénomène d'amorçage des fissures sur la surface extérieure et au frottement, qui influencent considérablement l'écoulement et rendent plus difficile le dépouillement classique. A petite vitesse de déformation, on utilise en général le test de traction, mais la variation de la géométrie, et

notamment l'apparition de la striction, empêchent d'atteindre des déformations importantes. Pour mieux maîtriser l'évolution géométrique pendant l'essai, la solution est de suivre dynamiquement le profil de l'éprouvette. Une telle méthodologie expérimentale a été développée à l'Ecole des Mines de Nancy, permettant la mise au point d'un système vidéo-métrique.

Des besoins particuliers dans la connaissance des matériaux (chemins de déformation plus proches de ceux qui caractérisent les procédés industriels, sollicitations complexes), ont conduit au développement de nouveaux essais de caractérisation rhéologique. Ainsi le CEMEF a-t-il mis au point le test multiaxial de traction-torsion avec un pilotage mixte qui permet d'imposer simultanément une vitesse de rotation et une vitesse de traction ([BAUDIN, 1988]).

Une fois que les conditions opératoires et les mesures expérimentales sont bien définies, l'objectif prioritaire est d'établir un modèle de calcul permettant de connaître l'état de contrainte et de déformation en tout point de l'éprouvette. C'est ce que nous appellerons une méthodologie de dépouillement.

3. MÉTHODES DE DÉPOUILLEMENTS CLASSIQUES

La plupart des dépouillements rhéologiques sont basés sur des modèles simples d'analyse de la cinématique d'essais et de la distribution des contraintes, des variables de déformation et de la température. Généralement on utilise des hypothèses simplificatrices comme par exemple:

- * conservation de la symétrie de l'éprouvette pendant la déformation.
- * choix d'un champ de vitesse suivant une analyse cinématique simple.
- * distribution longitudinale (axiale) homogène de la déformation dans la partie utile de l'éprouvette.
- * conditions de déformation isothermes ($T = \text{cte}$ ou homogène).

Le Tableau 1.2 synthétise les principales étapes de calcul de l'analyse mécanique des tests présentés sur la Figure 1.6. Avec les hypothèses simplificatrices, on arrive à exprimer globalement la déformation équivalente $\bar{\epsilon}$ et la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\epsilon}}$ directement en fonction des variables opératoires P^c :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\bar{\epsilon}}(P^c), \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(P^c) \quad (1.7)$$

Par des calculs analytiques simples, on définit le tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$ en fonction des mesures expérimentales et des variables opératoires seulement, sous la forme:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(M^{ex}, P^c) \quad (1.8)$$

Tableau 1.2: Schéma général de dépouillement pour les tests rhéologiques classiques

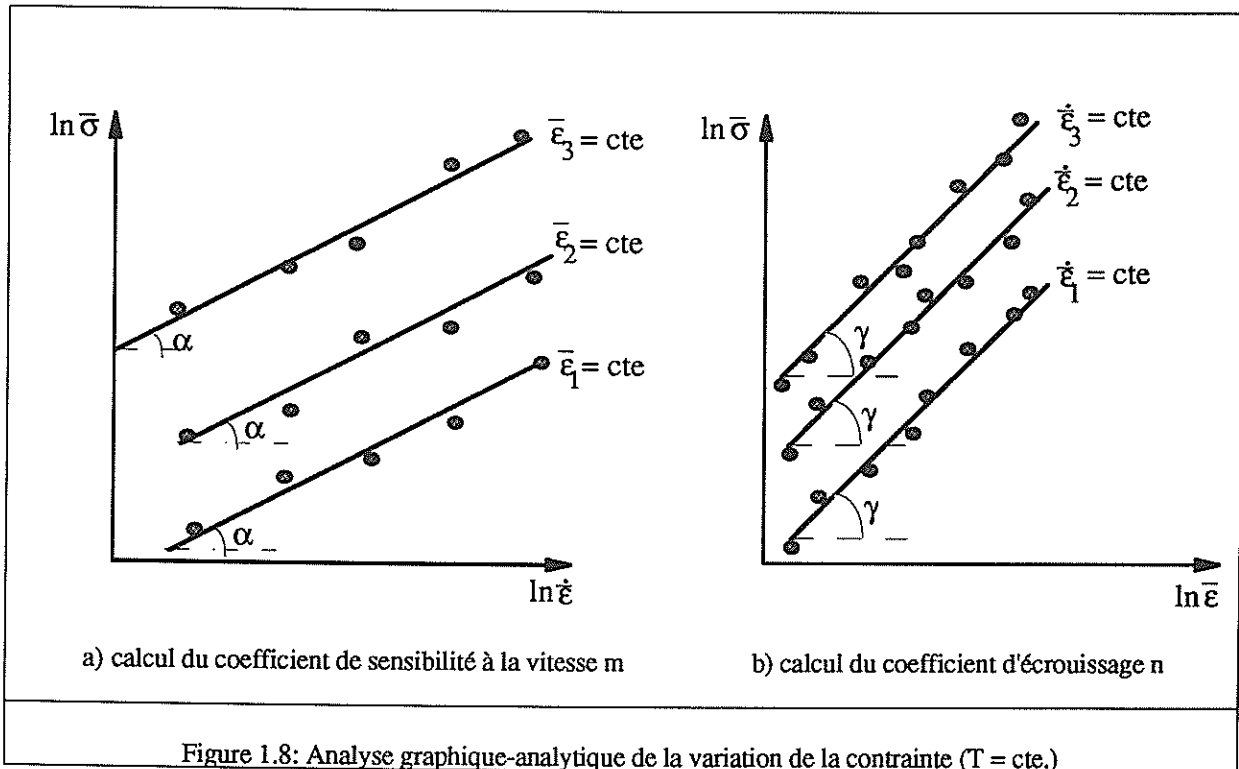
	TORSION	TRACTION	COMPRESSION
Pilotage	$\dot{N} = cte$	$V = cte$ ou $\dot{\epsilon} = cte \Rightarrow V(t) = l_0 \dot{\epsilon} \exp(\dot{\epsilon} t)$	$V = cte$ ou $\dot{\epsilon} = cte \Rightarrow V(t) = -h_0 \dot{\epsilon} \exp(-\dot{\epsilon} t)$
Hypothèses sur la cinématique	$v \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{2\pi r}{l_0} \dot{N} \\ v_z = 0 \end{cases}$	$v \begin{cases} v_r = -\frac{V}{2l} r \\ v_\theta = 0 \\ v_z = \frac{V}{l} z \end{cases}$	$v \begin{cases} v_r = \frac{V}{2h} r \\ v_\theta = 0 \\ v_z = -\frac{V}{h} z \end{cases}$
Variables de déformations	$\dot{\epsilon} = \frac{2\pi r}{\sqrt{3}l_0} \dot{N}$ $\bar{\epsilon} = \frac{2\pi r}{\sqrt{3}l_0} N$	$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{l}}{l}$ $\bar{\epsilon} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$	$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{h}}{h}$ $\bar{\epsilon} = \ln\left(\frac{h_0}{h}\right)$
Contraintes	$\sigma \begin{cases} s_{\theta z} = s_{z\theta} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \\ p = 0 \end{cases}$	$\sigma \begin{cases} s_{rr} = s_{\theta\theta} = -\frac{\bar{\sigma}}{3} \\ s_{zz} = 2\frac{\bar{\sigma}}{3} \\ p = -\frac{\bar{\sigma}}{3} \end{cases}$	$\sigma \begin{cases} s_{rr} = s_{\theta\theta} = \frac{\bar{\sigma}}{3} \\ s_{zz} = -2\frac{\bar{\sigma}}{3} \\ p = \frac{\bar{\sigma}}{3} \end{cases}$
Calcul de $\bar{\sigma}$	$\bar{n} = \frac{\partial \ln C^{ex}}{\partial \ln \dot{N}}, \bar{m} = \frac{\partial \ln C^{ex}}{\partial \ln N}$ $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}C^{ex}}{2\pi r_0^3} (3 + \bar{n} + \bar{m})$ (Fields et Backofen)	$\bar{\sigma} = \sigma_z = \frac{lF^{ex}}{\pi r_0^2 l_0}$	$\bar{\sigma} = \sigma_z = \frac{hF^{ex}}{\pi r_0^2 h_0}$

Un premier niveau de dépouillement suppose l'enregistrement des valeurs de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ en fonction de la déformation, de la vitesse de déformation et de la température. Pour déterminer la contrainte correspondant aux autres conditions de déformations ou en dehors du domaine étudié, il faut utiliser des techniques d'interpolation ou d'extrapolation. Les erreurs induites peuvent être assez importantes, limitant la capacité prédictive de l'analyse.

C'est la raison pour laquelle les rhéologues cherchent à établir une relation analytique qui exprime la dépendance $\bar{\sigma}(P, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T)$. Pour trouver une telle expression, les analyses classiques s'appuient en général sur trois catégories de méthodes: graphique-analytique, calcul direct de paramètres et régression (linéaire ou non-linéaire).

3.1 Analyse graphique-analytique

Les analyses graphiques-analytiques cherchent à établir une forme analytique de la dépendance de $\bar{\sigma}$ en fonction de $\bar{\epsilon}$, $\dot{\bar{\epsilon}}$ et T , partant d'un ensemble de courbes exprimant les variations suivantes: $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ pour $\dot{\bar{\epsilon}} = cte, T = cte$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\dot{\bar{\epsilon}})$ pour $\bar{\epsilon} = cte, T = cte$ et $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(T)$ pour $\bar{\epsilon} = cte, \dot{\bar{\epsilon}} = cte$. Une technique classique repose sur une représentation des courbes en coordonnées logarithmiques. On suppose par exemple qu'on obtient les variations présentées dans la Figure 1.8.



La forme linéaire des courbes permet de définir la relation de comportement à l'aide d'une loi de type Norton-Hoff:

$$\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n \dot{\bar{\epsilon}}^m \quad (1.9)$$

où les valeurs des coefficients m et n s'expriment simplement par: $m = \text{tg}\alpha$ et $n = \text{tg}\gamma$.

La plupart des études rhéologiques utilisent ce type de dépouillement. Il est également employé dans des études récentes sur l'adoucissement des matériaux. On citera Cingara et al. ([CINGARA, 1992]), Mc QUEEN et al. ([Mc QUEEN, 1993]) qui ont déterminé les coefficients d'une loi de type "sinus hyperbolique" à partir des essais de torsion à chaud. On peut remarquer que le calcul des paramètres devient très délicat si le nombre de paramètres augmente, car il faut définir une stratégie de découplage de l'influence de chaque coefficient, et déterminer successivement la valeur de chacun. La propagation d'erreur peut être assez importante et la méthode devient alors trop approximative.

3.2 Méthode de calcul direct de paramètres

Pour des lois simples, définies par un nombre réduit de paramètres, on peut utiliser un modèle de calcul direct des paramètres. On suppose par exemple que le matériau obéit à une loi de la forme (1.9). Dans ce cas les coefficients n et m s'expriment par:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\Delta \ln \bar{\sigma}}{\Delta \ln \bar{\epsilon}} \text{ pour } \dot{\bar{\epsilon}} = \text{cte.} \\ m &= \frac{\Delta \ln \bar{\sigma}}{\Delta \ln \dot{\bar{\epsilon}}} \text{ pour } \bar{\epsilon} = \text{cte.} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour un test de traction piloté à $\dot{\bar{\epsilon}} = \text{cte}$, on exprime la valeur de la contrainte par la relation $\bar{\sigma} = \frac{\exp(\dot{\bar{\epsilon}} t)}{\pi r_0^2} F^{ex}$ (voir Tableau 1.2) et on obtient:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\Delta \ln(F^{ex}) + \dot{\bar{\epsilon}} \Delta t}{(\Delta \ln t)} \text{ pour } \dot{\bar{\epsilon}} = \text{cte.} \\ m &= \frac{\Delta \ln(F^{ex}) + \Delta \ln \dot{\bar{\epsilon}}}{\Delta \ln \dot{\bar{\epsilon}}} \text{ pour } t = \text{cte.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pour un test de torsion, en tenant compte de la formule de Fields et Backofen (Tableau 1.2), les relations (1.10) conduisent à :

$$\begin{aligned} n &= \bar{n} + \frac{\Delta \ln(3 + \bar{n} + \bar{m})}{\Delta \ln N} \\ m &= \bar{m} + \frac{\Delta \ln(3 + \bar{n} + \bar{m})}{\Delta \ln \dot{N}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Le calcul reste valable si le matériau respecte rigoureusement une loi de comportement de type (1.9). Dans le cas contraire, les valeurs des coefficients rhéologiques dépendent du choix de l'incrément de temps Δt ou du nombre de tours ΔN , et respectivement, de la vitesse de déformation $\Delta \dot{\epsilon}$ ou de rotation $\Delta \dot{N}$, et compliquent alors sérieusement l'expérience (augmentation du nombre des essais, diminution du pas d'acquisition). De plus, on dispose de valeurs différentes de n et de m , ce qui rend plus difficile la définition de la loi.

L'extension de cette méthodologie aux autres lois de comportement, plus complexes et sophistiquées, est pratiquement impossible, car un calcul direct de paramètres s'avère très difficile.

3.3 Méthode de régression

Pour éviter les erreurs induites par les méthodes de calculs successifs et pour avoir une analyse quantitative plus précise on utilise la technique de régression des courbes ([GRABER, 1990] - pour le test de torsion, [PUCHI, 1995] - pour le test de compression). Ainsi, à partir des études qualitatives sur la dépendance $\bar{\sigma}(P, \bar{\epsilon}, \dot{\epsilon}, T)$ (avec une méthode graphique par exemple), on choisit une forme analytique pour $\bar{\sigma}$, et on cherche les valeurs des paramètres pour lesquelles on obtient le meilleur ajustement par rapport aux courbes "expérimentales" contrainte-déformation.

Par exemple, dans le cas d'une loi de type (1.9), on détermine les coefficients K , n et m qui minimisent l'expression quadratique:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} [K \bar{\epsilon}^n(i) \dot{\epsilon}^m(j) - \bar{\sigma}(i, j)]^2 \quad (1.13)$$

où N_c représente le nombre de courbes expérimentales et N_p le nombre de points d'acquisition par courbe. Dans ce cas la précision du calcul de paramètres est fortement liée à la précision d'évaluation de la contrainte équivalente.

3.4 Synthèse et conclusions

L'analyse de ces méthodes de dépouillement classiques montre que les coefficients sont toujours déterminés à partir d'un calcul préalable de la contrainte. On a besoin, dans tous les cas, d'établir une correspondance étroite entre la valeur de $\bar{\sigma}$ d'une part, et les valeurs de la

déformation cumulée, de la vitesse équivalente de déformation et de la température d'autre part. De ce point de vue, les conditions de pilotage du test expérimental deviennent très importantes.

Ainsi, pour le test de torsion, la condition $\dot{N} = cte$ conduit à une vitesse de déformation quasi-constante en temps, et on peut alors envisager assez facilement des tests à $\dot{\epsilon} = cte$. La principale restriction est l'apparition d'une localisation de la déformation, due à un phénomène d'adoucissement du matériau. Ce phénomène de localisation est d'autant plus prononcé que la température d'essai est plus petite, et la vitesse de rotation plus grande ([BENSAHA, 1994]). Dans ces conditions, les hypothèses permettant le calcul de la contrainte ne sont plus valables, et l'application d'une méthodologie de dépouillement classique est impossible.

Pour les tests de traction ou de compression le pilotage peut être fait:

- soit pour des vitesses de traverse constantes ($V = cte$), et dans ce cas, il faut remonter aux courbes correspondant à une vitesse de déformation constante, ce qui impose une connaissance a priori sur la dépendance vis-à-vis de $\dot{\epsilon}$,

- soit pour une vitesse de traverse $V = V(t)$ de telle sorte que l'on a $\dot{\epsilon} = cte$ (régulation en vitesse). Dans ce dernier cas il faut déterminer précisément la valeur de la vitesse de déformation, notamment lorsqu'il y a une localisation importante induite par le changement de la forme géométrique de l'éprouvette (épaule de striction par exemple, ou apparition d'un bombé). L'hypothèse d'homogénéité de la déformation n'est pas respectée et un calcul analytique devient difficile, voire impossible.

Du fait de l'échauffement dû à la déformation plastique, les essais sont généralement anisothermes. Des corrections doivent donc être utilisées afin d'obtenir des courbes de contrainte approximativement équivalentes aux courbes correspondant à une déformation isotherme. Comme ces corrections nécessitent déjà une quantification de l'influence de la température, il faut contrôler le régime thermique dans l'éprouvette de telle façon que les tests soient quasi-isothermes. Ceci montre l'importance qu'il faut donner au phénomène d'auto-échauffement, notamment lorsqu'il s'agit d'essais de torsion et de compression à grande vitesse de déformation ([LUIG, 1990], [KASPAR, 1993]).

Une première conclusion concernant les méthodes de dépouillements classiques est donc la nécessité d'utiliser un pilotage de grande précision afin de maintenir constantes la vitesse de la déformation et la température. Souvent ces conditions expérimentales sont très difficiles à réaliser, surtout si l'on s'intéresse au comportement d'un matériau soumis à une déformation plastique complexe et sévère.

La deuxième remarque porte sur l'utilisation d'hypothèses de calcul simplificatrices (par exemple la distribution homogène de la déformation et de la température), qui peuvent conduire à une mauvaise estimation de contraintes, et implicitement, à des valeurs imprécises des coefficients rhéologiques.

On peut donc conclure que, du point de vue quantitatif, les modèles de dépouillements classiques restent trop approximatifs. Par contre, ils permettent d'avoir une première idée sur l'allure des courbes contraintes-déformations. Parfois cela se révèle quand même insuffisant lorsque le comportement est complexe. Pour illustrer ceci, dans le paragraphe suivant, on présente quelques exemples de lois de comportement pour les alliages métalliques.

4. FORMULATION DES LOIS DE COMPORTEMENT

4.1 Approche phénoménologique

Pour les alliages métalliques, la majorité des lois rencontrées dans la littérature sont établies à partir d'observations physiques et microstructurales. Partant d'une étude semi-empirique concernant le phénomène de fluage, Sellars et Tegart ([SELLARS, 1966]) ont exprimé quantitativement la liaison entre la contrainte et la vitesse de déformation sous la forme:

$$\begin{cases} A[\sinh(\alpha\bar{\sigma})]^{1/m} = Z \\ Z = \dot{\epsilon} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right) \end{cases} \quad (1.14)$$

où Z représente le paramètre de Zener-Hollomon, R est la constante thermodynamique, Q représente l'énergie d'activation et A , α , m , sont des paramètres caractéristiques du matériau. Ainsi un comportement viscoplastique peut être défini par la relation:

$$\bar{\sigma} = K' \sinh^{-1} \left[\frac{1}{A} \dot{\epsilon}^m \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \right] \quad (1.15)$$

où m représente la sensibilité par rapport à la vitesse de déformation, $K' = \frac{1}{\alpha}$ est une constante, et $\beta = mQ/R$ représente le coefficient thermique définissant l'influence de la température.

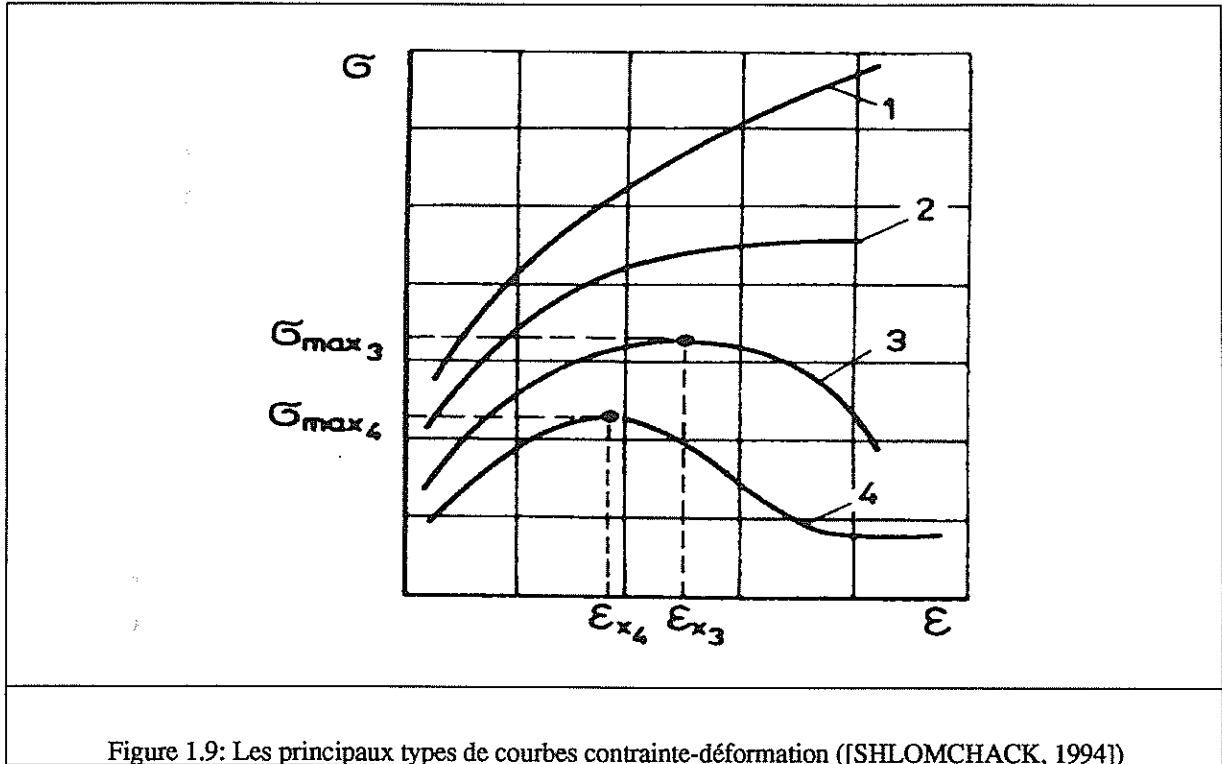
A partir de cette expression on peut vérifier que, dans certaines conditions, on retrouve les lois classiques utilisées fréquemment dans la modélisation de la viscoplasticité. Ainsi pour $\alpha\bar{\sigma} < 0.8$ ($\approx \bar{\sigma} < 100 \text{ MPa}$), on a $\sinh(\alpha\bar{\sigma}) \approx \alpha\bar{\sigma}$, et on obtient la loi viscoplastique de type Norton-Hoff:

$$\bar{\sigma} = \frac{K'}{A} \dot{\epsilon}^m \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.16)$$

Pour $\alpha\bar{\sigma} \geq 0.8$ ($\approx \bar{\sigma} \geq 100 \text{ MPa}$), on a $\sinh(\alpha\bar{\sigma}) \approx \frac{1}{2} \exp(\alpha\bar{\sigma})$, et en conséquence la loi s'écrit sous une forme additive:

$$\bar{\sigma} = \frac{K'}{2} [-\ln A + m \ln(\dot{\bar{\epsilon}}) + \frac{\beta}{T}] \quad (1.17)$$

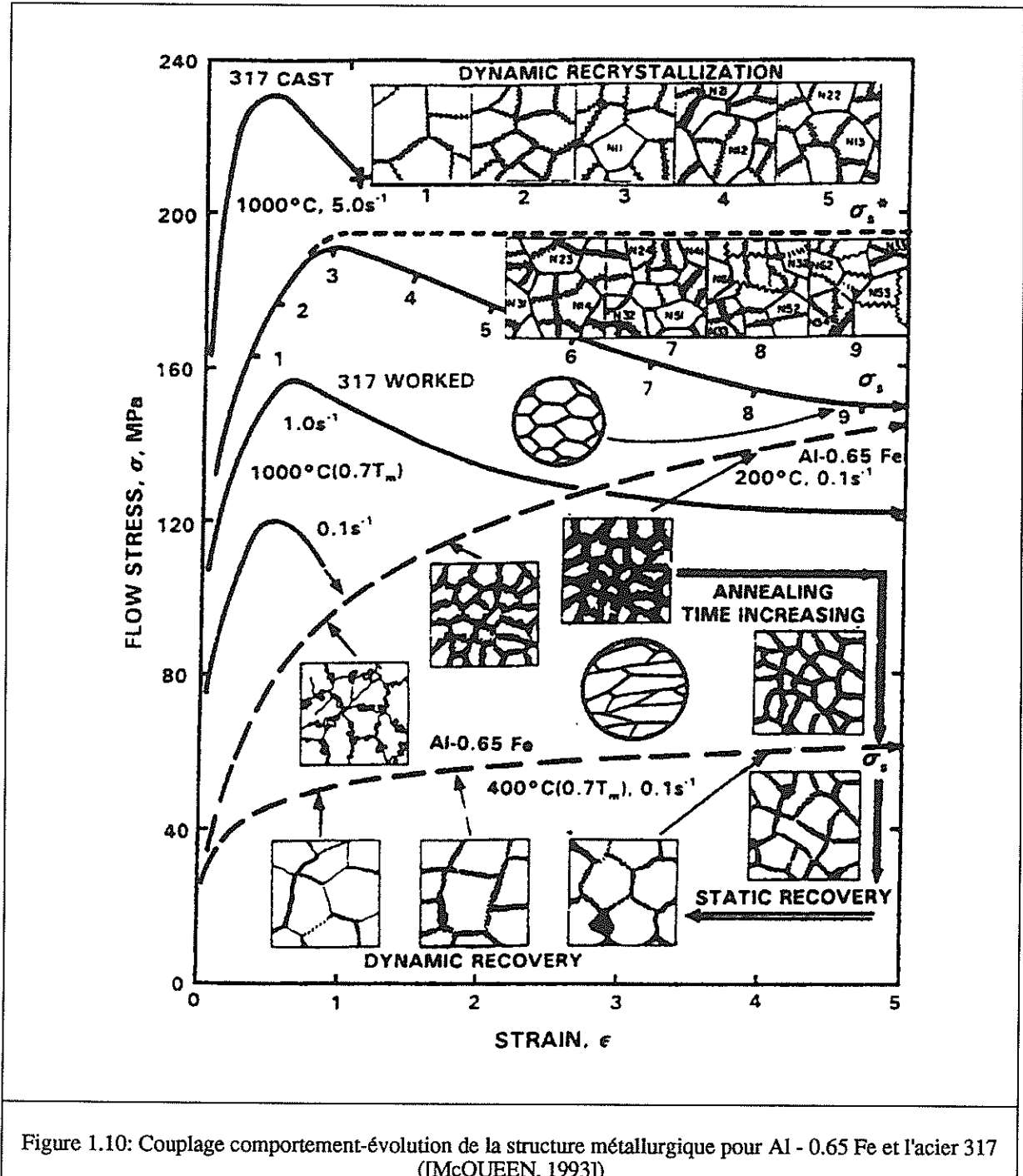
Pour établir la dépendance de $\bar{\sigma}$ vis-à-vis de la déformation, on utilise classiquement une étude phénoménologique de l'évolution de $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ pour $\dot{\bar{\epsilon}} = cte$ et $T = cte$. D'après Shlomchack ([SHLOMCHACK, 1994]), on peut classer le comportement en grandes déformations en quatre types de courbes contraintes-déformations (voir Figure 1.9).



Les deux premiers types de courbes sont caractérisés par un accroissement de la contrainte avec la déformation, et éventuellement l'apparition d'un niveau de saturation (courbe 2). On attribue souvent cette variation au phénomène de consolidation du matériau (écrouissage). Dans certains cas, on remarque la présence d'un pic de contrainte (σ_{\max}) suivi d'une décroissance de la contrainte (adoucissement) jusqu'au point de rupture (courbe 3). Pour des matériaux ductiles, la compétition entre la consolidation et l'adoucissement conduit à un régime stationnaire, mis en évidence par la présence d'un palier de contrainte (courbe 4).

L'analyse des évolutions microstructurales (Figure 1.10) révèle la correspondance entre l'allure de la courbe $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ et les principaux mécanismes de déformation: l'écrouissage, la restauration et la recristallisation dynamique. Ainsi, l'étape de consolidation (écrouissage) est mise en évidence par le développement continu d'une structure en sous-grains, principalement due à un accroissement progressif de la densité totale de dislocations à l'intérieur des grains.

Parallèlement, si la mobilité des dislocations est grande, les phénomènes d'annihilation provoquent la destruction des cellules intragranulaires (restauration) et en conséquence conduisent à une diminution progressive du taux d'érouissage.



L'équilibre entre la production et l'annihilation des dislocations permet de définir la saturation en contrainte. Lorsque l'énergie interne associée aux mouvements et interactions des différents défauts cristallins (dislocations, paroi de cellules, sous joints, joints de grains ...)

devient importante, on constate l'apparition et la croissance de nouveaux grains: c'est l'étape de la recristallisation. Ensuite, la compétition entre les zones écrouies et les zones recristallisées conduit à un état stationnaire définissant le palier de la contrainte.

Pour établir une description analytique d'un tel comportement, on cherche généralement des expressions empiriques en concordance avec les allures des courbes contrainte-déformation. Notre recherche bibliographique montre que les lois de comportement de type viscoplastique peuvent être classifiées en quatre catégories principales: lois multiplicatives simples (voir l'équation (1.16)), lois avec couplage en Z (paramètre de Zener-Hollomon) (voir l'équation 1.15), lois avec couplage microstructural, et lois complexes.

4.1.1 Lois multiplicatives simples

Les lois les plus simples s'écrivent sous la forme suivante:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma}_{\dot{\bar{\epsilon}}} \bar{\sigma}_T \quad (1.18)$$

où chaque terme multiplicatif représente successivement la dépendance par rapport à la déformation $\bar{\epsilon}$, à la vitesse de déformation $\dot{\bar{\epsilon}}$ et à la température T .

La plus connue est la loi de Norton-Hoff avec un écrouissage de type Krupkowski (relation 1.6). Les termes multiplicatifs sont définis dans ce cas par :

$$\bar{\sigma}_{\bar{\epsilon}} = K_I (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n, \bar{\sigma}_{\dot{\bar{\epsilon}}} = \dot{\bar{\epsilon}}^m, \bar{\sigma}_T = \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.19)$$

Ce type de loi modélise bien les courbes de type 1. Pour des grandes vitesses de déformation, si l'énergie d'activation thermique est importante (valeur élevée de β), le terme d'adoucissement thermique permet de décrire une allure décroissante.

En ce qui concerne la détermination des coefficients rhéologiques, K_I , n , m et β , la littérature montre qu'en général on applique des méthodes de dépouillements classiques:

a) analyse graphique-analytique: voir l'analyse des alliages de Titane proposé par Vandecastelle ([VANDECASTELLE, 1988] à partir des tests de torsion).

b) méthode de calcul analytique direct partant de la variation de $\dot{\bar{\epsilon}}$ sur une géométrie cylindrique avec saut de diamètre ([HUILIN, 1994] en utilisant un test de traction).

c) description analytique du test et régression linéaire ([KHODDAM, 1995], [GRÄBER, 1990] pour des éprouvettes de torsion tubulaires).

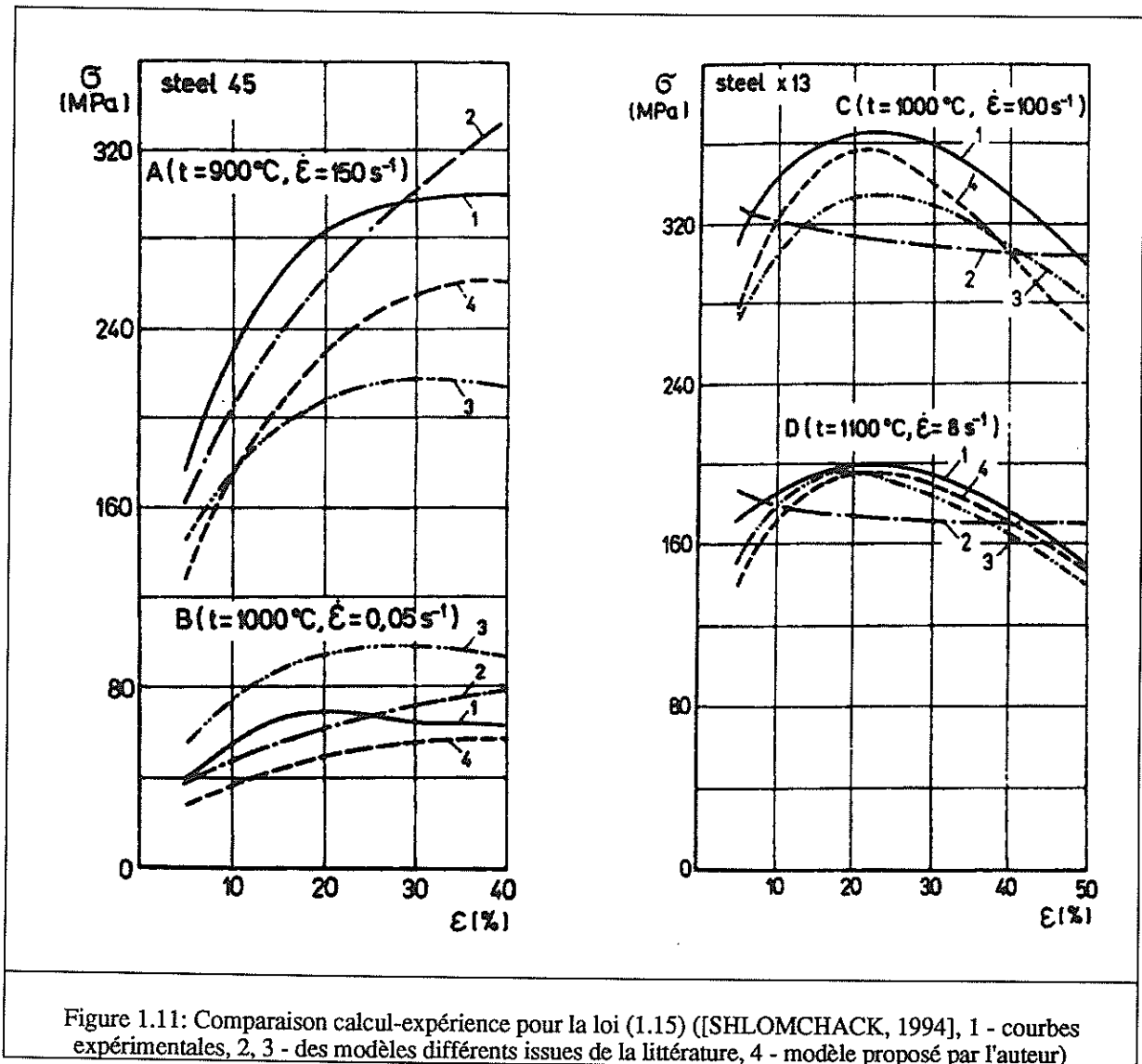
Des études concernant les courbes de type 3 ou 4 (Fig.1.9) montrent qu'on a besoin d'une formulation permettant de prendre en compte la compétition entre l'écrouissage et le

phénomène d'adoucissement dynamique. Ainsi dans [SHLOMCHACK, 1994], l'auteur propose une loi de type:

$$\bar{\sigma} = A \left[1 + b \bar{\epsilon} \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_x}\right) \right] \dot{\bar{\epsilon}}^m \exp(-\beta T) \quad (1.20)$$

en accord avec la théorie de Maxwell pour la relaxation. Le calcul des paramètres A , b , $\bar{\epsilon}_x$, m et β intervenant dans la formulation mathématique, utilise des critères de similitude.

La comparaison calcul-expérience (Figure 1.11) montre qu'il y a un accord qualitatif satisfaisant, mais que du point de vue quantitatif l'écart est significatif.



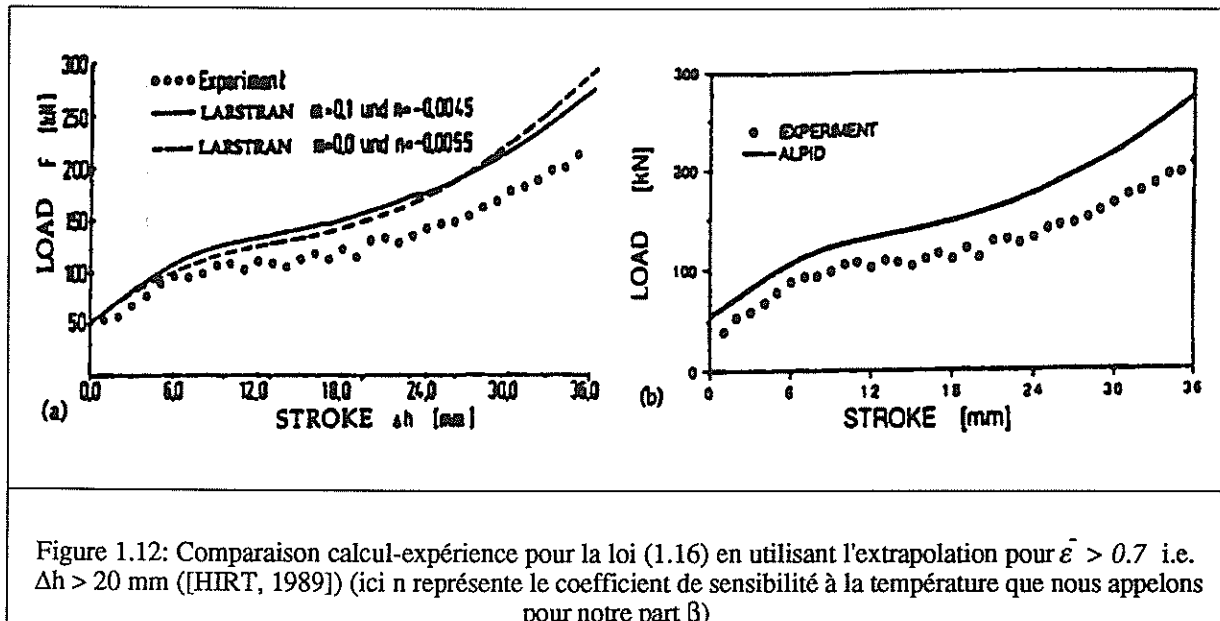
Pour éviter de formuler analytiquement la variation de la contrainte en fonction de la déformation équivalente, certains auteurs proposent d'utiliser une loi de la forme:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0(\bar{\epsilon}) \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^m \exp[-\beta(T-T_0)] \quad (1.21)$$

où $\bar{\sigma}_0(\bar{\epsilon})$ est considérée identique à la courbe $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ obtenue par un essai de compression dans des conditions correspondant à $\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\bar{\epsilon}}_0$ et $T = T_0$.

Ainsi dans [HIRT, 1989] un modèle éléments finis de simulation de l'essai de compression utilise une loi de la forme (1.21). Les valeurs de m et β , ainsi que certains coefficients thermiques sont déterminés par une méthode de type essai-erreur appliquée jusqu'à ce que l'accord calcul-expérience soit satisfaisant. Pour tester la capacité prédictive d'une telle approche, les auteurs ont choisi de vérifier le calcul de la force de compression.

La Figure 1.12 montre que, pour de petites déformations ($\bar{\epsilon} < 0.7$), les prédictions sont assez précises, mais que, pour des déformations plus importantes, si on utilise une extrapolation de la loi expérimentale (par exemple $\bar{\sigma}_0(\bar{\epsilon}) = \bar{\sigma}_0(0.7)$ pour $\bar{\epsilon} > 0.7$), on obtient un écart important entre le calcul et l'expérience. Cette méthodologie apparaît donc comme restrictive.



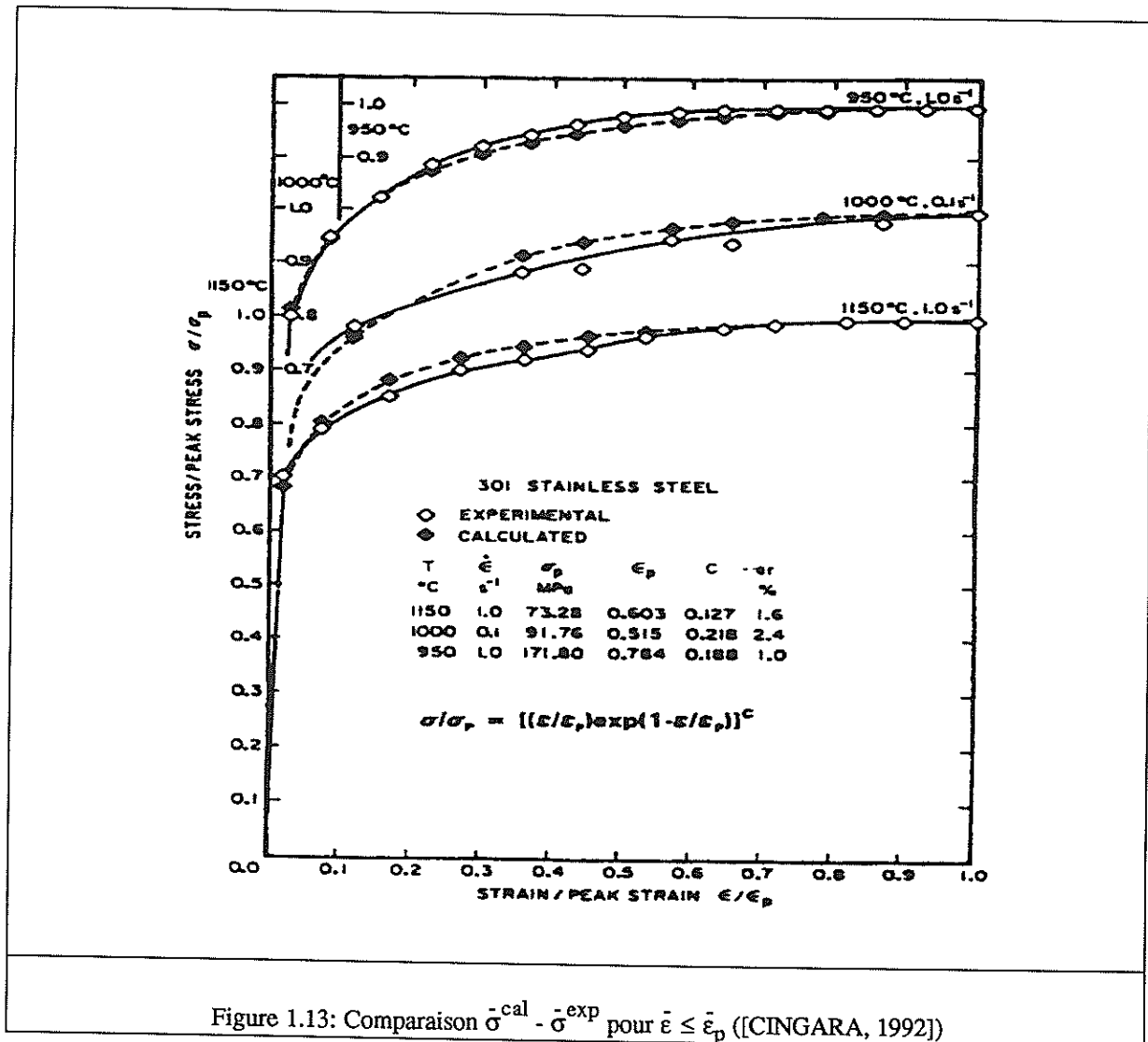
4.1.2 Lois avec couplage en Z

Ces lois ont été développées pour décrire les phénomènes de restauration et de recristallisation en fonction du paramètre de Zener-Holomon Z sous la forme générale:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0(\bar{\epsilon}, Z) \quad (1.22)$$

Ainsi McQueen et al. ([McQUEEN, 1993], [McQUEEN, 1995]) et Cingara et al. ([CINGARA, 1992]) ont étudié, grâce au test de torsion, l'interdépendance comportement-microstructure, notamment en ce qui concerne la description quantitative de l'adoucissement dynamique.

Le dépouillement des courbes de torsion est fait par la méthode de Fields et Backofen en utilisant des analyses graphiques et des techniques de régression.



En utilisant la loi de Sellars et Tegart pour décrire la dépendance du pic de contrainte en fonction de la vitesse de déformation généralisée et de la température, le comportement est décrit par:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_p \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_p} \right]^c \exp \left[-c \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_p} \right] \\ \text{avec} \\ \bar{\varepsilon}_p = a \bar{\sigma}_p + b, \quad \bar{\sigma}_p = K \sinh^{-1} \left[\frac{1}{A} Z^m \right] \end{cases} \quad (1.23)$$

Sur la Figure 1.13 on voit que l'accord calcul-expérience est bon pour des courbes de type (2) (voir Figure 1.9), car la comparaison se fait seulement pour la partie croissante, c'est à dire pour $\bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_p$. Les auteurs ne donnent pas la prédiction du modèle pour la partie descendante. Une loi similaire est utilisée dans [ADAMCZYK, 1995], avec une relation de type $\bar{\varepsilon}_p = aZ^b$ pour calculer la déformation correspondant au pic. Les paramètres sont dans ce cas déterminés par une méthode de régression linéaire.

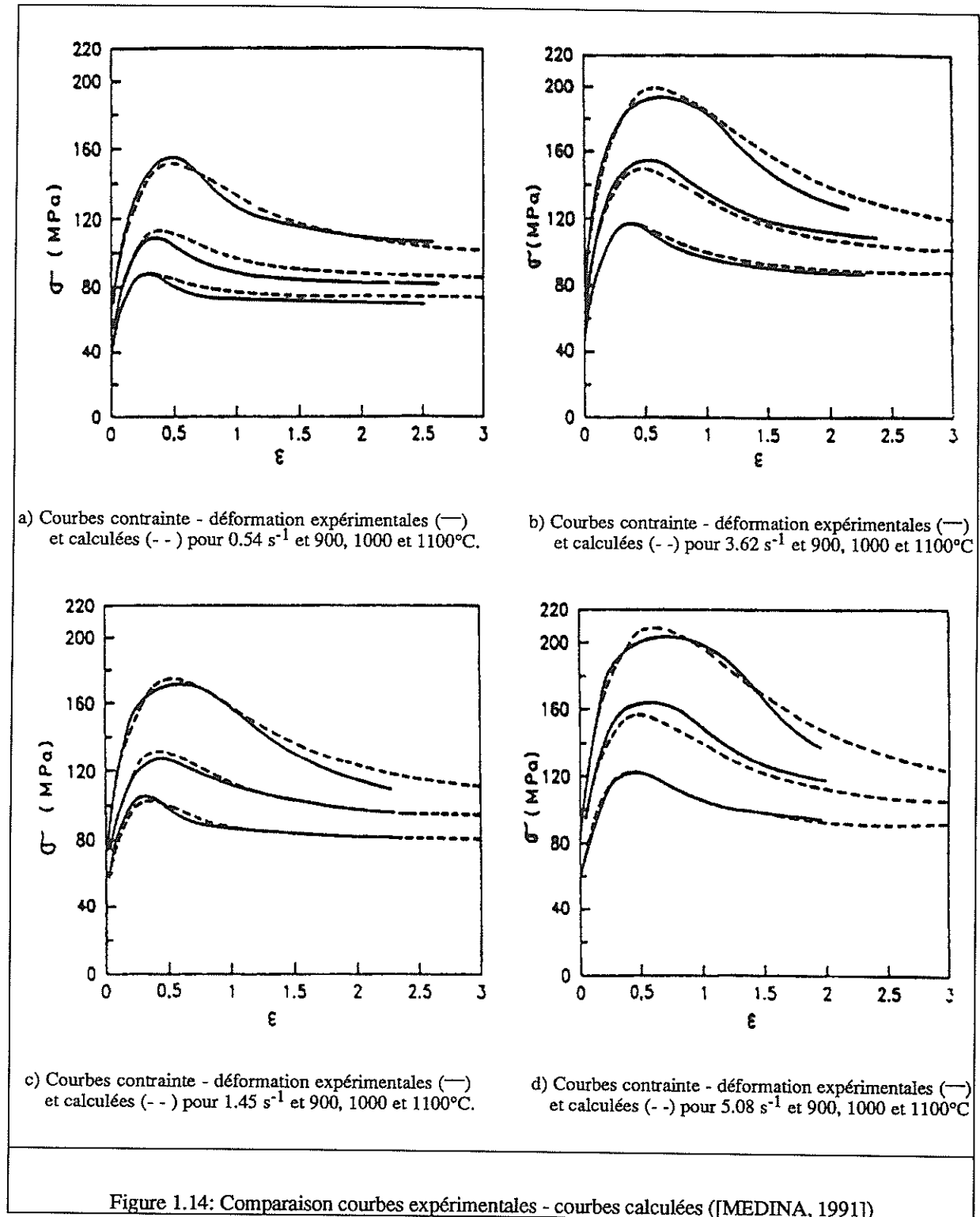
Medina et al. ([MEDINA, 1991]) proposent un modèle plus complexe sous la forme:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_r = B[1 - \exp(-c\bar{\varepsilon})]^n \text{ pour } \bar{\varepsilon} < a\bar{\varepsilon}_p \\ \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_r - B' \left\{ 1 - \exp \left[-k \left(\frac{\bar{\varepsilon} - a\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p} \right)^{n'} \right] \right\} \text{ pour } \bar{\varepsilon} \geq a\bar{\varepsilon}_p \\ \text{avec} \\ \bar{\varepsilon}_p = p_1 Z^{p_2}, B = B_1 Z^{B_2}, c = c_1 Z^{c_2}, B' = B'_1 Z^{B'_2} \end{cases} \quad (1.24)$$

où $\bar{\sigma}_r$ représente la composante de restauration dynamique. Tous les paramètres sont déterminés par une régression non-linéaire des valeurs "expérimentales" de $\bar{\sigma}^{exp}$ obtenues par la méthode de Fields et Backofen.

La principale difficulté consiste à éviter la discontinuité de la dérivée de contrainte pour le point définissant le début de la recristallisation dynamique ($\bar{\varepsilon} = a\bar{\varepsilon}_p$). Les auteurs ont choisi de corriger la courbe de durcissement afin d'obtenir une courbe conforme.

La Figure 1.14 montre qu'il y a une bonne concordance entre le calcul et l'expérience, surtout pour les petites vitesses de déformations. Pour de grandes vitesses, on observe un écart important qui peut être dû au fait que l'auto-échauffement, assez important dans ce cas, est négligé.



Pour un alliage d'aluminium, Roucoules et al. [ROUCOULES, 1994] ont introduit la composante de restauration dynamique par une relation de type:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{se}^2 + (\sigma_i^2 - \sigma_{se}^2) \exp[-2B(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_i)]} \\ \sigma_i = K \dot{\bar{\epsilon}}^m, B = K' \dot{\bar{\epsilon}}^{m'} \\ \sigma_{se} = A \sinh^{-1}(K_e \dot{\bar{\epsilon}}^{me}) \end{cases} \quad (1.25)$$

et le terme de recristallisation dynamique par:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sigma^* - (\sigma^* - \sigma_{ss}) \{1 - \exp[-B(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^*)^n]\} \text{ pour } \bar{\epsilon} \geq \bar{\epsilon}^* \\ \sigma_{ss} = A \sinh^{-1}(K_s \dot{\bar{\epsilon}}^{ms}) \end{cases} \quad (1.26)$$

où σ^* correspond à l'état non recristallisé défini par exemple à l'aide de la relation (1.25). La Figure 1.15 donne les résultats de la comparaison calcul-expérience. L'introduction de la recristallisation dynamique permet d'avoir l'allure décroissante de la courbe correspondant à un adoucissement.

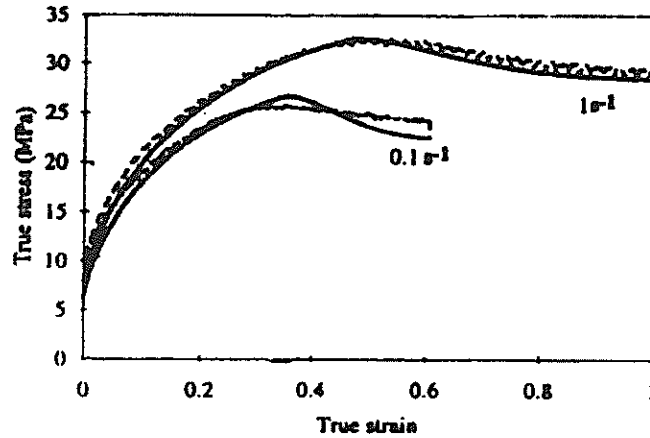


Figure 1.15: Comparaison calcul-expérience ([ROUCOULES, 1994])
(les valeurs "expérimentales" des contraintes ont été obtenues à partir d'un test de compression)

Un écart significatif est observé pour $\dot{\bar{\epsilon}} = 0.1 \text{ s}^{-1}$ car la variation expérimentale est plus proche d'une restauration. Il faut avoir donc une meilleure description de la compétition existant entre la restauration et la recristallisation. De plus, on remarque que le problème de discontinuité de la dérivée reste non résolu.

4.1.3 Lois avec couplage microstructural

On utilise généralement des modèles à variables internes pour relier l'évolution de la structure pendant la déformation, à la valeur de la contrainte d'écoulement. Le principe est de définir un ensemble de variables représentant la structure du matériau, par exemple la taille de grain, la densité de dislocations, la fraction recristallisée, et d'exprimer leur évolution dans le temps, soit par des expressions analytiques, soit à l'aide d'équations cinétiques ([MECKING, 1981]).

Une première catégorie d'études repose sur la corrélation existant entre le palier de saturation en contrainte ($\bar{\sigma}_s$) et l'état structural d'équilibre (taille de grain d_s = constante). Quantitativement on peut exprimer cette corrélation par une loi de type ([McQUEEN, 1993]):

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_s = e + f/d_s^p \\ d_s = c + d_0 \log Z \end{cases} \quad (1.27)$$

où $p = 1$ pour la restauration et $p = 0.75$ pour la recristallisation.

Ensuite, si on suppose le matériau constitué de deux phases distinctes: la phase recristallisée (caractérisée par la fraction volumique χ) et la phase non-recristallisée ($1-\chi$), on peut exprimer la contrainte par une loi de mélange:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{nr}(1-\chi) + \sigma_r \chi \quad (1.28)$$

où σ_{nr} représente le niveau de contrainte caractéristique de la fraction non-recristallisée (exprimé par exemple par des lois d'écrouissage ou de restauration), et σ_r est le niveau de contrainte associé à la fraction recristallisée χ (exprimé par exemple à l'aide de $\bar{\sigma}_s$ dans le cas de la recristallisation statique).

Pour des phénomènes d'adoucissement statique, la loi d'évolution de la fraction recristallisée s'écrit, d'après Avrami ([FUENTES, 1993]), sous la forme suivante:

$$\chi = 1 - \exp[-0.693(\frac{t}{t_{0.5}})^s] \quad (1.29)$$

où $t_{0.5}$ représente le temps pour lequel 50% de la structure a recristallisé, et dépend de la déformation, de la vitesse de déformation, de la température et des variables liées à la structure (taille de grain initiale par exemple).

En ce qui concerne les phénomènes d'adoucissement dynamique, il reste à trouver des relations fiables concernant la liaison entre le niveau de contrainte de chaque phase et l'évolution de la microstructure. La principale difficulté réside dans le fait que le changement de la structure pendant la déformation résulte d'une compétition continue entre l'écrouissage, la restauration et la recristallisation. C'est la raison pour laquelle la deuxième classe de modèles

([SCHMITT, 1995]) s'appuie sur une modélisation plus phénoménologique. Une étude de l'allure de la courbe (4), représentée sur la Figure 1.9, permet de définir une loi similaire avec (1.28) par:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ecr} (1-W) + \sigma_{sat} W \quad (1.30)$$

où W représente un taux d'adoucissement global (variable qui peut être liée à des observations métallurgiques, par exemple à la fraction recristallisée), σ_{ecr} est la contrainte associée à la phase écrouie et σ_{sat} représente la contrainte associée au palier de saturation.

On considère généralement l'état d'écrouissage lié à la densité de dislocations δ , suivant l'expression ([JONAS, 1975]):

$$\sigma_{ecr} = K\sqrt{\delta} \quad (1.31)$$

D'après Estrin et al. (ESTRIN, 1984)], la cinétique d'évolution de la densité des dislocations doit tenir compte simultanément du processus de formation des dislocations (exprimé par δ_+) et de leur annihilation (exprimé par δ_-). Ainsi, on peut écrire:

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta_+(\delta, \dot{\epsilon}, T) - \delta \cdot \delta_-(\dot{\epsilon}, T) \quad (1.32)$$

car, à un moment donné, la fonction d'annihilation est supposée proportionnelle à la densité de dislocations. L'article cité donne les expressions suivantes:

$$\delta_+ = n_1 \delta^{n'} \dot{\epsilon} \text{ et } \delta_- = n_2 \dot{\epsilon} \quad (1.33)$$

Ainsi pour $n_2 = 0$ (écrouissage sans restauration) et $n' \leq 1/2$, si on suppose que $\delta = \delta_0$ relatif à $\bar{\epsilon}_0$ lorsque $t = 0$, l'intégration de l'équation (1.32) donne l'expression classique de Krupkowski:

$$\sigma_{ecr} = \sigma_0 (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \text{ avec } n = \frac{0.5}{1-n'} \quad (1.34)$$

Pour $n_2 \neq 0$ (écrouissage avec restauration) et $n' = 0$ ([LAASRAOUI, 1991]), on obtient l'expression (1.25) utilisée par Roucoules et al. ([ROUCOULES, 1994]):

$$\sigma_{ecr} = \sqrt{\sigma_s^2 + (\sigma_0^2 - \sigma_s^2) \exp(-n_2 \bar{\epsilon})} \quad (1.35)$$

Si on suppose que $\sigma_0 = 0$, on trouve la loi classique de Voce ([VOCE, 1948]):

$$\sigma_{ecr} = \sigma_s \sqrt{1 - \exp(-n_2 \bar{\epsilon})} \quad (1.36)$$

En ce qui concerne le taux d'adoucissement W , on propose de définir une loi cinétique sous la forme suivante:

$$\frac{dW}{dt} = (1-W)f_w(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) \quad (1.37)$$

Si on considère que la vitesse d'adoucissement est proportionnelle à la vitesse de déformation généralisée ($f_w = \dot{\bar{\epsilon}}$), on obtient une loi de type Avrami:

$$W = 1 - \exp(-r\bar{\epsilon}) \quad (1.38)$$

Si on parle de fraction recristallisée dynamiquement, on peut choisir une expression similaire à (1.29), mais écrite en fonction de la déformation équivalente:

$$W = 1 - \exp\left[-0.693\left(\frac{\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_r}{\bar{\epsilon}_{0.5} - \bar{\epsilon}_r}\right)^s\right] \quad (1.39)$$

où $\bar{\epsilon}_{0.5}$ représente la déformation correspondant à 50% de structure recristallisée (exprimée en fonction des conditions de déformations) et $\bar{\epsilon}_r$ est le niveau de la déformation définissant le début de la recristallisation dynamique (généralement exprimée en fonction du paramètre de Zener-Hollomon et de la taille initiale de grain). On peut vérifier facilement que cette relation peut être obtenue à partir de (1.37) si on choisit $f_w = c\bar{\epsilon}^{s-1}\dot{\bar{\epsilon}}$.

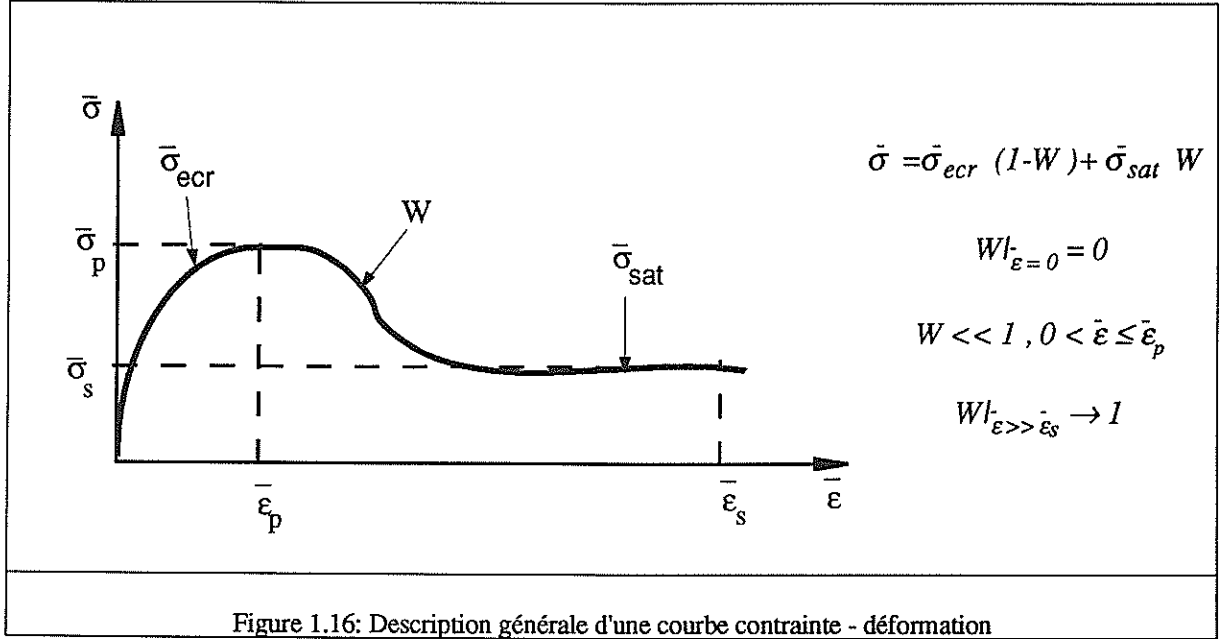
Cette analyse montre que du point de vue du couplage avec la microstructure, la modélisation du phénomène d'adoucissement dynamique doit comporter au minimum deux variables internes supplémentaires, ici représentées par la densité de dislocations δ et le taux d'adoucissement global W . De plus nous avons montré que si les équations cinétiques permettent une intégration analytique, on peut exprimer le niveau de contrainte directement en fonction des variables principales de la déformation ($\bar{\epsilon}$, $\dot{\bar{\epsilon}}$, T).

4.1.4 Lois complexes

Partant d'une analyse purement mathématique de la variation générale de $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T)$ (Figure 1.16), Ingolf ([INGOLF, 1991]) écrit la contrainte équivalente sous la forme (1.30) en associant à chaque domaine de la courbe des fonctions caractéristiques: de consolidation $\bar{\sigma}_{scr}$ pour la partie ascendante, de couplage W pour la transition et de saturation $\bar{\sigma}_{sat}$ pour le palier.

Généralement ces fonctions sont définies par:

$$\begin{cases} W = W(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) \text{ et } W \in [0,1], W \rightarrow 1 \text{ pour } \bar{\epsilon} \rightarrow \infty \\ \bar{\sigma}_{ecr} = \bar{\sigma}_{ecr}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T), \bar{\sigma}_{sat} = \bar{\sigma}_{sat}(\dot{\bar{\epsilon}}, T) \end{cases} \quad (1.40)$$



Il propose un choix semi-empirique de la forme analytique de ces fonctions rhéologiques. Ainsi pour la composante d'écrouissage, on a:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ecr} = A(\dot{\bar{\epsilon}}, T) (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^{B(\dot{\bar{\epsilon}}, T)} \\ A(\dot{\bar{\epsilon}}, T) = a_0 + a_1 \frac{1}{T} + a_2 \ln \dot{\bar{\epsilon}} + a_3 \frac{1}{T} \ln \dot{\bar{\epsilon}} \\ B(\dot{\bar{\epsilon}}, T) = b_0 + b_1 \frac{1}{T} + b_2 \ln \dot{\bar{\epsilon}} + b_3 \frac{1}{T} \ln \dot{\bar{\epsilon}} \end{cases} \quad (1.41)$$

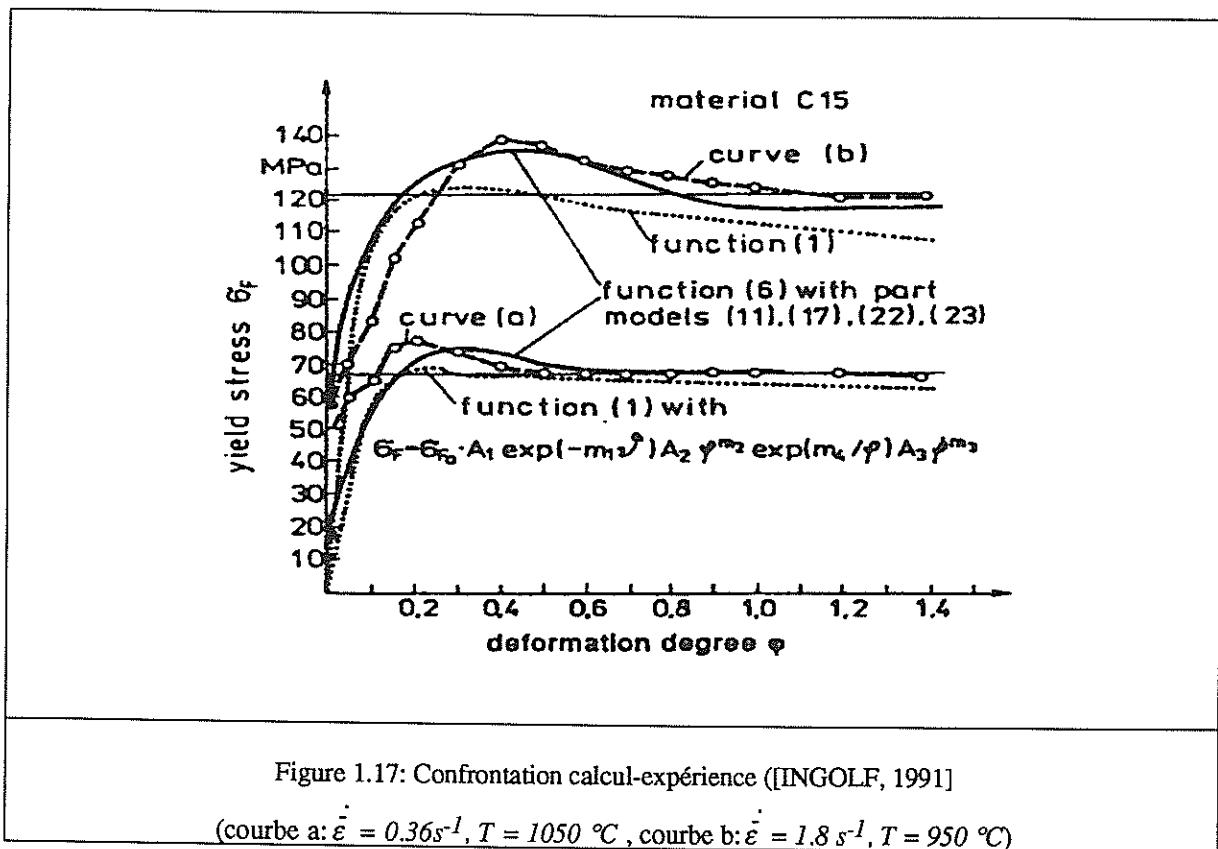
En ce qui concerne le palier de saturation, il propose l'expression suivante:

$$\bar{\sigma}_{sat} = c_0 \exp(-c_1 T) \dot{\bar{\epsilon}}^{c_2 + c_3 T} \quad (1.42)$$

La fonction de couplage W est introduite d'une manière classique, similaire à une loi de type Avrami, mais avec une dépendance non-linéaire en $\dot{\bar{\epsilon}}$ et T :

$$\begin{cases} W = 1 - \exp(-R\dot{\epsilon}^S) \\ R(\dot{\epsilon}, T) = R_0 \exp\left(\frac{R_1}{T}\right) \dot{\epsilon}^{R_2+R_3T} \\ S(\dot{\epsilon}, T) = S_0 \exp\left(\frac{S_1}{T}\right) \dot{\epsilon}^{S_2+S_3T} \end{cases} \quad (1.43)$$

La Figure 1.17 montre que l'allure des courbes calculées est assez proche de celle expérimentale.



L'auteur explique l'écart par le fait que les paramètres ont été déterminés par une régression des courbes correspondant aux expériences faites sur une nuance métallurgique différente. Il faudrait aussi ajouter la nécessité de définir plus rigoureusement la résolution du couplage thermo-mécanique, afin de pouvoir utiliser un principe de régression non-linéaire pour trouver les paramètres rhéologiques.

4.2 Synthèse et modèle rhéologique proposé

Une synthèse globale de toutes les lois présentées montre que, dans la plupart des cas, elles dérivent d'une expression de type (1.30), ce qui permet de conclure que cette formulation généralise l'expression semi-empirique d'une loi de comportement en grandes déformations. De plus une loi simple de type (1.6), utilisée dans la simulation du forgeage à chaud, ne peut pas représenter correctement le comportement du matériau sur un large domaine de déformation, des températures initiales et des vitesses de déformation. On propose donc l'introduction dans un code élément finis d'une loi de type (1.30).

Partant du fait que la plupart des matériaux rencontrés dans l'industrie de la mise en forme à chaud obéissent à une loi de type Norton-Hoff, on écrit la contrainte équivalente sous la forme:

$$\bar{\sigma} = K_s(P, T) + \sqrt{3}K(\bar{\epsilon}, T)(\sqrt{3}\dot{\bar{\epsilon}})^{m(\bar{\epsilon}, T)} \quad (1.44)$$

où K_s représente le seuil de contrainte et K la consistance.

En concordance avec la loi de mélange, on propose d'écrire la consistance sous la forme généralisée suivante:

$$K(P, \bar{\epsilon}, T) = K_{ecr} [1-W] + K_{sat}W \quad (1.45)$$

où les fonctions rhéologiques K_{ecr} , W et K_{sat} sont définies en corrélation avec les mécanismes de déformations plastiques qui caractérisent le matériau:

$$\begin{cases} K_{ecr} = K_{ecr}(P, \bar{\epsilon}, T) \\ W = W(P, \bar{\epsilon}, T) \\ K_{sat} = K_{sat}(P, T) \end{cases} \quad (1.46)$$

Ainsi pour un écrouissage classique, on peut choisir:

$$K_{ecr} = K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.47)$$

où K_0 représente la consistance de référence. Dans ce cas, la loi classique (1.6) est obtenue pour $W = 1$ et $K_s = 0$.

Pour les matériaux caractérisés par la restauration dynamique, on peut choisir une loi de Voce (1.36):

$$K_{ecr} = K_0 \sqrt{1 - \exp(-n\bar{\epsilon})} \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.48)$$

Si on veut modéliser globalement le phénomène d'adoucissement, on définit la fonction de couplage W et la composante de saturation par:

$$W = 1 - \exp(-r\bar{\epsilon}^s) \text{ et } K_{sat} = K_{0st} \exp\left(\frac{\beta_{st}}{T}\right) \quad (1.49)$$

où les coefficients d'adoucissement r et s peuvent dépendre de la température, et, pour des lois plus complexes, de la vitesse de déformation.

Pour l'approche associant le taux d'adoucissement à la fraction recristallisée dynamiquement, on part de l'expression (1.39) et on exprime W par:

$$W = \begin{cases} 0, & \bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_r \\ 1 - \exp[-r(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_r)^s], & \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_r \end{cases} \quad (1.50)$$

où $r > 0$ et $s > 0$ sont soit constantes, soit fonctions de la température et de la vitesse de déformation. La déformation critique $\bar{\epsilon}_r$ à partir de laquelle commence le processus de recristallisation peut être considérée comme un paramètre du modèle. Le problème de continuité des dérivées de la consistance au point critique est résolu (Annexe 1) si on choisit $s > 1$, ou pour $s \leq 1$, si on définit le palier de saturation par:

$$K_{sat} = K_{ecr}(P, \bar{\epsilon}_r, T) \quad (1.51)$$

L'avantage principal de cette formulation par rapport aux lois proposées par d'autres auteurs ([MEDINA, 1991], [ROUCOULES, 1994]) est la cohérence de la transition entre la phase de durcissement et l'adoucissement du à la recristallisation.

5. CONCLUSIONS

Pour conclure sur cette analyse bibliographique, on peut souligner qu'une analyse rhéologique suppose deux étapes fondamentales:

I *une approche phénoménologique permettant la formulation d'une loi de comportement en corrélation avec les observations expérimentales.*

II *une approche quantitative qui suppose:*

- la construction d'un modèle décrivant le test rhéologique et
- la détermination des paramètres intervenant dans la description mathématique de la loi constitutive.

Partant des conclusions établies sur les limites d'application des méthodes classiques de dépouillement, et si on ajoute la complexité des mécanismes de déformation traduite par des lois rhéologiques plus sophistiquées, on voit apparaître la nécessité de développer une nouvelle stratégie d'analyse des tests mécaniques. Une des voies consiste à améliorer la modélisation du test, en utilisant des hypothèses raisonnables et en accord avec les équations fondamentales de la thermo-plasticité. On doit aussi tenir compte de l'apparition des phénomènes de localisation et d'autoéchauffement, donc d'une distribution non-homogène de la déformation et de la température.

Plus le modèle devient complexe, plus l'identification des paramètres rhéologiques sur la loi elle-même devient difficile, car un calcul direct de la contrainte, à partir des grandeurs mesurées est impossible. C'est la raison pour laquelle on doit identifier la loi en utilisant ces réponses, donc les grandeurs mesurées. D'où la nécessité d'une approche de type inverse, que l'on définira et détaillera dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2

L'ANALYSE RHÉOLOGIQUE: UNE APPROCHE DE TYPE INVERSE

1. INTRODUCTION

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les modèles de dépouillement classique présentés ne sont valables que dans des conditions expérimentales restrictives. Ces restrictions sont nécessaires pour justifier les approximations d'analyse quantitative utilisées pour transformer les valeurs expérimentales en courbes contrainte-déformation. Pour des sollicitations plus sévères qui conduisent à un fort autoéchauffement et à une importante localisation de la déformation, l'analyse du comportement doit tenir compte du couplage thermo-mécanique et de la compétition existant entre les phénomènes de durcissement et d'adoucissement caractéristiques des grandes déformations. De ce point de vue, les tendances actuelles des études rhéologiques ont montré qu'il faut introduire des lois capables de décrire simultanément l'influence de l'histoire de la déformation, de la température, de la vitesse de déformation et de l'évolution de la structure. Ainsi la description quantitative du comportement devient de plus en plus complexe et un dépouillement classique est très difficile, voire impossible à appliquer.

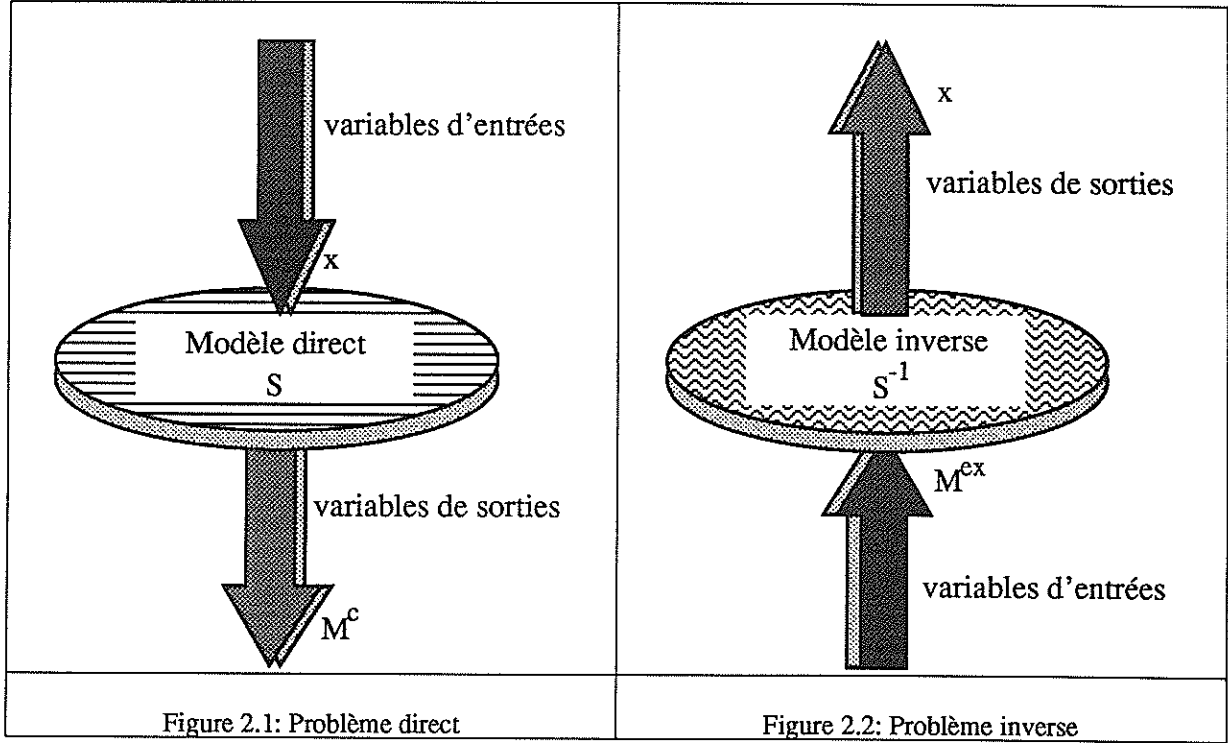
Il est donc évident qu'il faut développer des modèles d'analyses rhéologiques plus rigoureux, plus systématiques et flexibles. C'est l'objectif que nous nous sommes fixés dans ce travail, en proposant un modèle rhéologique basé sur une analyse inverse.

2. PROBLÈMES INVERSES

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique, . . .) permettent la description du comportement des systèmes physiques grâce à des modèles mathématiques. Le but principal est de pouvoir exprimer la réponse du système (M^c) en fonction des différentes conditions (paramètres opératoires, coefficients des matériaux, variables caractéristiques du modèle, . . .) qui perturbent l'état initial ou de référence. Cette relation de type cause-effet représente un problème direct qui s'exprime formellement sous la forme condensée suivante (voir figure 2.1):

$$M^c = S(x) \quad (2.1)$$

où x représente l'ensemble des variables ou paramètres qui définissent le système étudié.



Une fois précisé le modèle associé au système, le but principal est d'améliorer ou de déterminer les conditions d'état ou de fonctionnement x pour lesquelles on obtient des réponses qui satisfassent à certaines exigences imposées par l'environnement. C'est le cas de tous les problèmes d'optimisation classiques ou de contrôle de processus, définis par la forme standard:

$$\begin{cases} \min_x Q(x, M^c) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où Q représente la fonction objectif choisie en fonction du type de problème à résoudre et g sont les fonctions qui définissent les restrictions imposées.

Pour des études expérimentales, il faut déterminer les valeurs de x telles que la réponse du système reproduise les mesures expérimentales, c'est à dire que l'on doit avoir $M^c = M^{ex}$.

Dans ce cas on doit résoudre un problème de type inverse (voir figure 2.2). Pour des modèles très simples, cela revient à inverser directement l'équation (2.1), et on obtient:

$$x = S^{-1}(M^c) \quad (2.3)$$

Ce type de formulation est très ancien, car il correspond à la résolution d'une équation standard. L'augmentation continue du degré de complexité des modèles a nécessité le développement de techniques plus complexes comme la théorie matricielle, l'analyse spectrale, la théorie des équations différentielles et intégrales, etc. En utilisant le concept d'opérateur mathématique, on peut transformer le problème à résoudre en une résolution de type (2.3). Par exemple, pour un calcul en dynamique de structure, Cottin et al. ([COTTIN, 1984]) utilisent l'inversion d'un opérateur de type Laplace pour déterminer les coefficients de pondération de sous-matrices qui définissent le modèle matriciel de l'équation d'équilibre. Chau et al. ([CHAU, 1991]) déterminent la température de la paroi intérieure d'une tuyauterie par l'inversion d'une équation spectrale définie avec des fonctions de transfert de type Fourier en utilisant des mesures dans la paroi extérieure, soit sur la température (avec des thermocouples), soit sur les contraintes (avec des jauges).

La plupart des applications actuelles sont décrites par des modèles très complexes et une inversion directe de type (2.3) est pratiquement impossible. L'étude bibliographique montre que dans ce cas l'analyse inverse est basée sur le principe de régression. On cherche alors les variables x pour lesquelles les valeurs prédites par le modèle de calcul M^c seront les plus proches possible des valeurs mesurées ou connues M^{ex} . L'utilisation de ce genre d'analyse est assez ancienne. Ainsi un exemple classique est celui de Halley qui en 1704 a calculé les paramètres d'orbite d'une comète à partir des observations faites en 1531, 1607 et 1682. Il a ainsi pu prédire son passage en 1758. Des études systématiques concernant la formulation et la résolution générale des problèmes inverses ont débuté vers les années 1960-1970. Les premières approches concernent la théorie du contrôle des systèmes développée pour le domaine électronique ([NORTON, 1986]), et en particulier l'identification des paramètres intervenant dans la description des modèles par des équations différentielles ([GOODSON, 1974]). Du point de vue mathématique, une contribution importante sur la description d'opérateur associé à la solution d'un problème inverse et sur l'analyse de la stabilité et de l'unicité est apportée par Tikhonov et al. ([TIKHONOV, 1974]). Ces dernières années, on constate un intérêt important des ingénieurs pour l'analyse inverse. Ainsi Beck et al. ([BECK, 1974]) synthétisent les principaux aspects d'une identification paramétrique dans le domaine thermique. Collins et al. ([COLLINS, 1974]) présentent le principe d'identification des paramètres liés à la structure en dynamique en utilisant la modélisation par éléments finis. Macqueene et al. ([MACQUEENE, 1981]) appliquent l'analyse inverse pour déterminer le flux de chaleur en surface à partir des mesures de températures en certains points de la pièce, Yeh et al. ([YEH, 1983]) utilisent la technique d'identification pour trouver les coefficients de transmission de l'eau dans le sol.

L'augmentation des performances des modèles numériques utilisant des méthodes de différences finies ou d'éléments finis a conduit, vers la fin des années '90, au développement intensif de cette méthodologie. La plupart des applications concernent:

a) la détermination des paramètres de conception: par exemple l'optimisation de la masse d'une structure par un algorithme de type simplex ([OUDSHOORN, 1991]) ou des paramètres de sollicitations optimales: par exemple le calcul de l'amplitude et de la vitesse initiale d'une contrainte pulsatoire appliquée sur une plaque circulaire de telle sorte que la déformation thermo-élastique du point central soit minimale ([MANOACH, 1989]).

b) le calcul des paramètres structuraux ou extrinsèques liés à l'amélioration des valeurs des matrices de rigidité, de masse et d'amortissement pour des systèmes dynamiques ([ZHANG, 1987], [WEI, 1989], [LEE, 1991]) ou liés au procédé de recalage de modèles de simulation ([LALLEMENT, 1991]).

c) l'identification des régions mal modélisées, en postulant que les erreurs de calcul avec éléments finis sont localisées là où l'erreur en relation de comportement est la plus importante ([LADEVEZE, 1991], [REYNIER, 1996]).

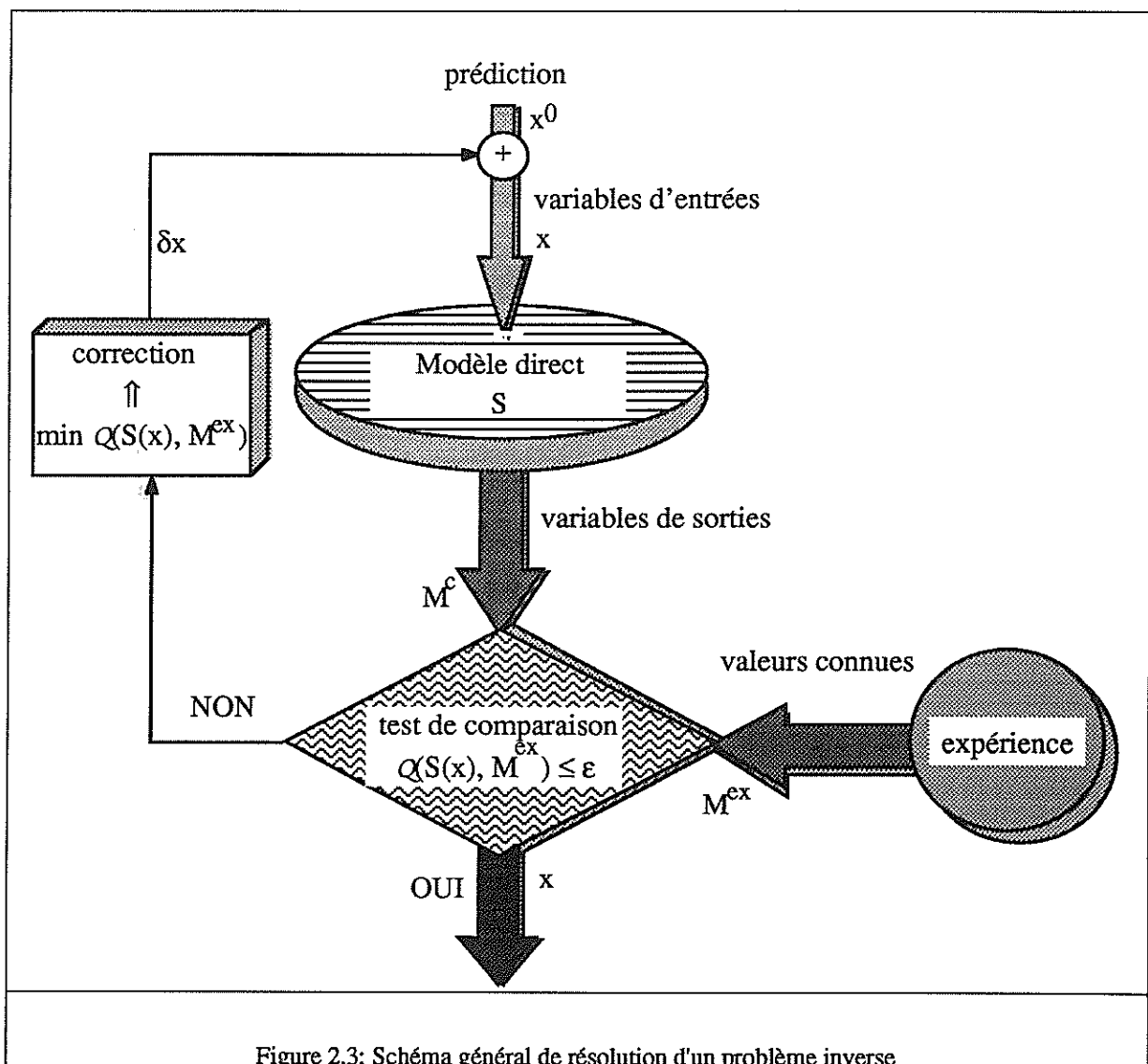
d) l'optimisation de la forme par: la conception d'une structure de volume minimale pour laquelle $\sigma \leq \sigma_{\max}$ ([YATHEENDHAR, 1993]), l'identification des paramètres liés à la description géométrique d'une structure ([OBLAK, 1993]), l'optimisation d'épaisseur de structures composites avec non-linéarités géométriques ([ABID, 1993]), l'optimisation de la forme d'une poutre ([MYSLINSKI, 1993]), d'un outil ([LEGAT, 1993] pour optimiser la forme d'une filière d'extrusion) ou d'une barre prismatique sollicitée en torsion ([SCHRAMM, 1993]) pour que la rigidité soit maximale et la masse soit minimale.

e) l'identification d'une géométrie de forme inconnue ([BONNET, 1991] en utilisant des mesures acoustiques sur la surface et un modèle linéaire de Helmholtz), d'une interface liquide-solide en solidification avec la condition supplémentaire que $T = T^0$ sur la surface isotherme ([ALEXANDROU, 1989], [ALEXANDROU, 1990]) ou que la surface du cristal soit plane ([DANTZIG, 1993]).

f) le calcul des grandeurs sur la surface en utilisant des conditions limites surabondantes: par exemple le calcul des forces de frottement par des mesures sur le déplacement en surface ([RODIC, 1992]), le calcul de la variation de température à la surface d'un moule tel que les distributions des contraintes résiduelles et des températures dans la pièce aient des valeurs optimales ([KANG, 1993]).

g) l'identification des caractéristiques physiques ou des paramètres intrinsèques liés aux matériaux étudiés. Ainsi des modèles d'identification ont été développés pour déterminer les paramètres de diffusion de l'eau dans le sol (transmissivité, conductivité, dispersivité, porosité, [SUN, 1990], [XIANG, 1991], [CHENG, 1992]), pour trouver la distribution spatiale de la diffusivité de l'air qui décrit la pollution atmosphérique ([OMATU, 1991]), pour déterminer le coefficient de transfert thermique ([MEHTA, 1990]), les coefficients intervenant dans la description des réactions chimiques (énergie d'activation, de réactivité - [KRISHNAN, 1993] ou dans la description d'évolution du système immunitaire ([BOCHAROV, 1994]).

Les études sur le comportement rhéologique des matériaux métalliques ou des polymères industriels utilisent généralement des modèles d'identification développés sur des modèles analytiques. On cite dans ce sens le calcul des paramètres d'une loi viscoélastique à partir des essais de choc sur des polymères solides ([TRANDAFILOVA, 1993]) et l'identification d'un modèle viscoélastique qui décrit le comportement de tampons d'accostage de TGV ([BONEILL, 1993]). Récemment ont démarré des études sur des modèles éléments finis: caractérisation des matériaux en sollicitations cycliques ou de fatigues ([CAILLETAUD, 1993]) ou des matériaux avec inclusions ([CONSTANTINESCU, 1993]). Dans le chapitre 3 on détaillera l'analyse bibliographique sur l'application d'une procédure d'identification des paramètres rhéologiques en utilisant la modélisation par éléments finis.



Toutes ces études montrent que le point essentiel d'une approche d'identification est la définition quantitative du problème inverse. On utilise généralement la formulation suivante:

$$\text{trouver } \hat{x} \text{ tel que } Q(S(\hat{x}), M^{ex}) = \min_x Q(S(x), M^{ex}) \quad (2.4)$$

où Q représente une fonction objectif qui exprime la distance ou l'écart entre les valeurs calculées et celles mesurées. Cette formulation permet de réduire l'analyse inverse à la résolution d'un problème classique d'optimisation (Figure 2.3).

Des études plus récentes (LUND, 1990], [REPACI, 1990] et [ELYUKHIN, 1991]) concernent la résolution d'un problème d'identification appliqué à des modèles physiques décrits par des équations différentielles. Les auteurs concluent en décomposant le problème inverse comme suit:

I définition du vecteur réponse ou des mesures expérimentales M^{ex} .

II définition d'un modèle direct de calcul S et le choix des variables inconnues x .

III formulation de la fonction objectif et description de l'algorithme de minimisation.

On propose de détailler ces étapes dans le cas d'une étude rhéologique faite à partir d'essais mécaniques. Dans ce cas, on doit résoudre un problème d'identification paramétrique, car on cherche les valeurs des coefficients rhéologiques P d'une loi de type (1.1) pour lesquelles on obtient la meilleure concordance entre le modèle de calcul et l'expérience.

3. MESURES EXPÉRIMENTALES

Généralement, les études d'identification des paramètres utilisent comme données expérimentales des mesures brutes issues d'une observation directe et fiable. Ces grandeurs doivent être sensibles aux variations des paramètres à identifier. Pour des essais rhéologiques classiques, on choisit comme grandeurs expérimentales brutes:

- les couples C^{ex} mesurés en fonction du nombre de tours N , pour différentes vitesses de rotation \dot{N} et températures initiales T^0 , dans le cas d'un test de torsion.
- les forces F^{ex} mesurées en fonction du déplacement Δl , pour différentes vitesses de traction V et températures initiales d'essai T^0 , dans le cas du test de traction et compression.
- les variations des couples et des forces pour un test multiaxial de traction-torsion.
- l'évolution des forces et de la géométrie pour un test de traction de l'éprouvette entaillée avec des mesures vidéo-métriques.

On décrira par la suite l'ensemble des grandeurs expérimentales par le vecteur $M^{ex} = \{M_1^{ex}, M_2^{ex}, \dots, M_s^{ex}\}$, où s représente le nombre maximal d'acquisitions de points

mesurés. Chaque essai étant représenté par une courbe expérimentale, on détermine s par le produit entre le nombre d'essais effectués et le nombre de points par courbe.

Certains auteurs proposent d'utiliser comme grandeurs "observables" les courbes contrainte-déformation. Comme les mesures locales avec des jauges spécifiques limitent l'analyse aux petites déformations, il faut utiliser des calculs intermédiaires à partir des mesures globales. Si le modèle est complexe, le passage direct entre $\{M^{ex}\} \rightarrow \{\bar{\sigma}\}$ devient impossible ou trop approximatif en raison des hyphothèses simplificatrices.

4. PROBLÈME RHÉOLOGIQUE DIRECT

Pour un essai rhéologique, un modèle direct de calcul doit permettre d'évaluer les distributions des contraintes et des déformations dans l'éprouvette, et d'exprimer les réponses du matériau correspondant aux différents niveaux de sollicitations imposés. On doit par exemple être capable de déterminer un couple ou une force pour différentes valeurs des paramètres opératoires et en fonction des différentes conditions initiales: température, gradient thermique, état microstructural, etc. Nous avons ainsi besoin d'une description quantitative de l'écoulement du matériau pendant la déformation plastique.

On dispose généralement d'un ensemble d'équations différentielles qui définissent l'équilibre mécanique et thermique, d'une loi de comportement associée à l'écoulement, des lois de frottements, des conditions de contact avec les outils et des conditions limites.

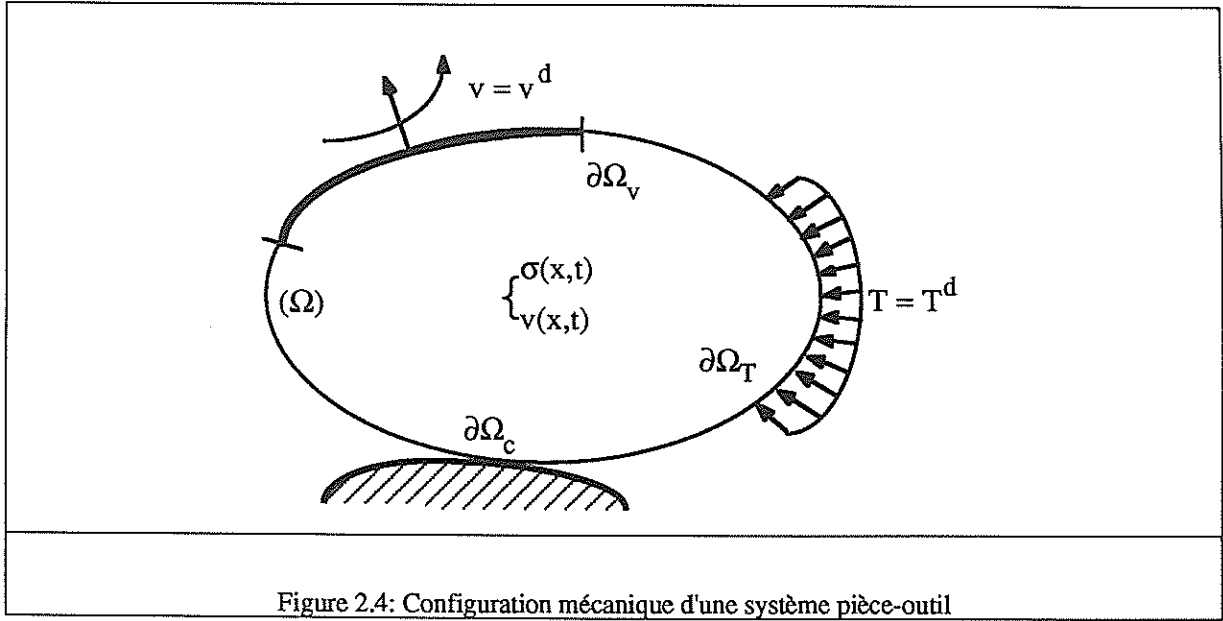
En ce qui concerne la loi de comportement, si on utilise l'expression (1.1) on peut écrire:

$$f_r(P, \bar{\sigma}, \dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon}, T) = 0 \quad (2.5)$$

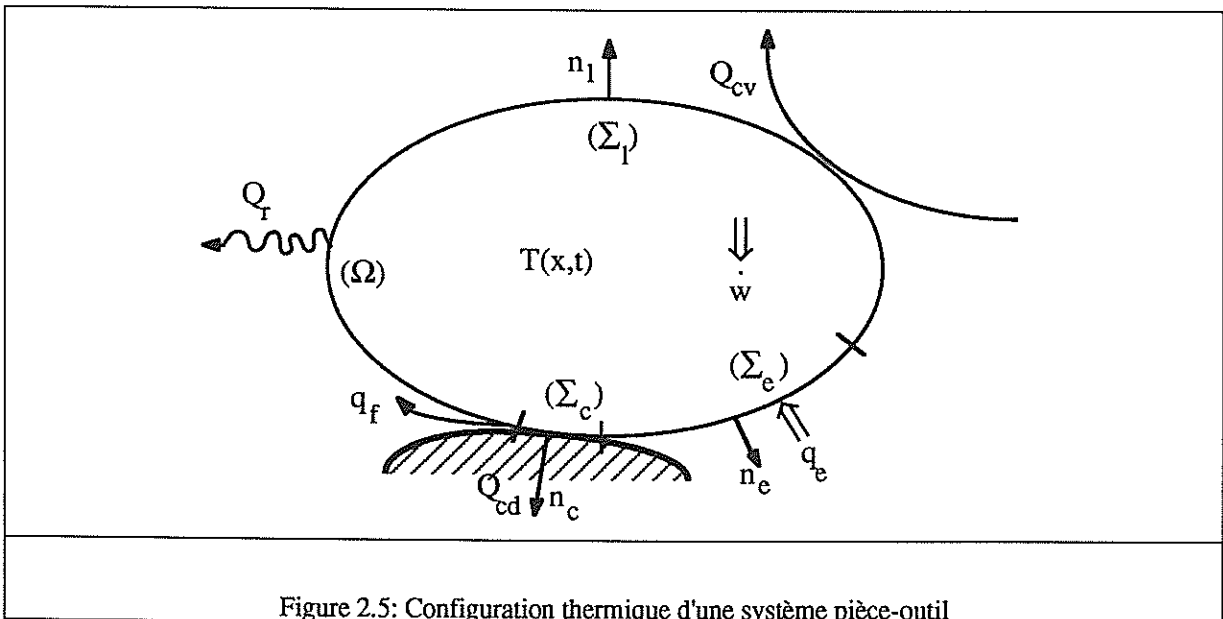
Pour exprimer l'équilibre mécanique d'un corps quelconque(Ω) soumis à un processus de déformation, on considère les conditions générales qui décrivent l'état d'un système pièce-outil: contact avec l'outil (mors, poinçon, matrice) sur $\partial\Omega_c$, vitesse imposée sur la partie $\partial\Omega_v$ et force imposée sur $\partial\Omega_T$ (voir Figure 2.4). Le matériau étant supposé parfaitement incompressible, la formulation d'équilibre mécanique conduit aux équations suivantes:

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma) = 0 \\ \sigma(x,t) \cdot n(x,t) = T^d(x,t) \text{ pour } x \in \partial\Omega_T \\ \text{div}(v) = 0 \\ v(x,t) = v^d(x,t) \text{ pour } x \in \partial\Omega_v \end{cases} \quad (2.6)$$

où n représente la normale à la surface au point x considéré.



Du point de vue thermique (voir Figure 2.5), le système pièce-outil est caractérisé par des conditions aux limites spécifiques comme la conduction avec les outils sur $\Sigma_c = \partial\Omega_c$ (flux de chaleur défini par Q_{cd}), la convection et la radiation sur la surface libre de la pièce Σ_l (flux de chaleur défini par $Q_{cv} + Q_r$). Pour une description complète, il faut tenir compte de la présence des sources d'énergie volumique générées par la déformation plastique $\dot{w} = r\bar{\sigma}\dot{\epsilon}$ (où r représente la fraction de travail plastique convertie en chaleur, généralement comprise entre 0.9 et 1), et des sources surfaciques représentées soit par le frottement: $q_f = -\tau_f(v-v^d)$ (où τ_f représente le cisaillement dû aux frottements), soit par des sources externes définies à l'aide d'un flux imposé q_e .



Finalement, l'équation thermique s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{dT(x,t)}{dt} - \text{div}(k \text{grad} T(x,t)) - r \dot{w} = 0 \text{ avec } T(x,t=0) = T^0(x) \\ Q_{cd} + q_f = h_{cd}(T - T_{out}) + q_f = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_c \text{ pour } x \in \Sigma_c \\ Q_{cv} + Q_r = (h_{cv} + h_r)(T - T_a) = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_l \text{ pour } x \in \Sigma_l \\ -q_e = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_e \text{ pour } x \in \Sigma_e \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où ρ est la densité du matériau, c représente la chaleur massique, k est la conductivité, h_{cd} est le coefficient de conduction avec les mors, h_{cv} est le coefficient de convection avec l'air, h_r représente le coefficient de radiation, T_{out} est la température des outils (ou des mors) et T_a représente la température ambiante. Le coefficient de radiation s'exprime à partir de la relation de Stephan-Boltzman par:

$$h_r = \varepsilon_r \sigma_r (T^2 + T_a^2)(T + T_a) \quad (2.8)$$

où ε_r représente l'émissivité et σ_r est la constante de Boltzman.

En conclusion, l'évolution du système rhéologique est décrit par le vecteur $q = \{\sigma, p, v, \dot{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}, T, \dot{T}\}$, qui contient toutes les principales variables internes intervenant dans la formulation quantitative. Ainsi l'ensemble des équations (2.5), (2.6), (2.7) peut s'exprimer formellement sous la forme condensée suivante:

$$F(P, q, x, t) = 0 \quad (2.9)$$

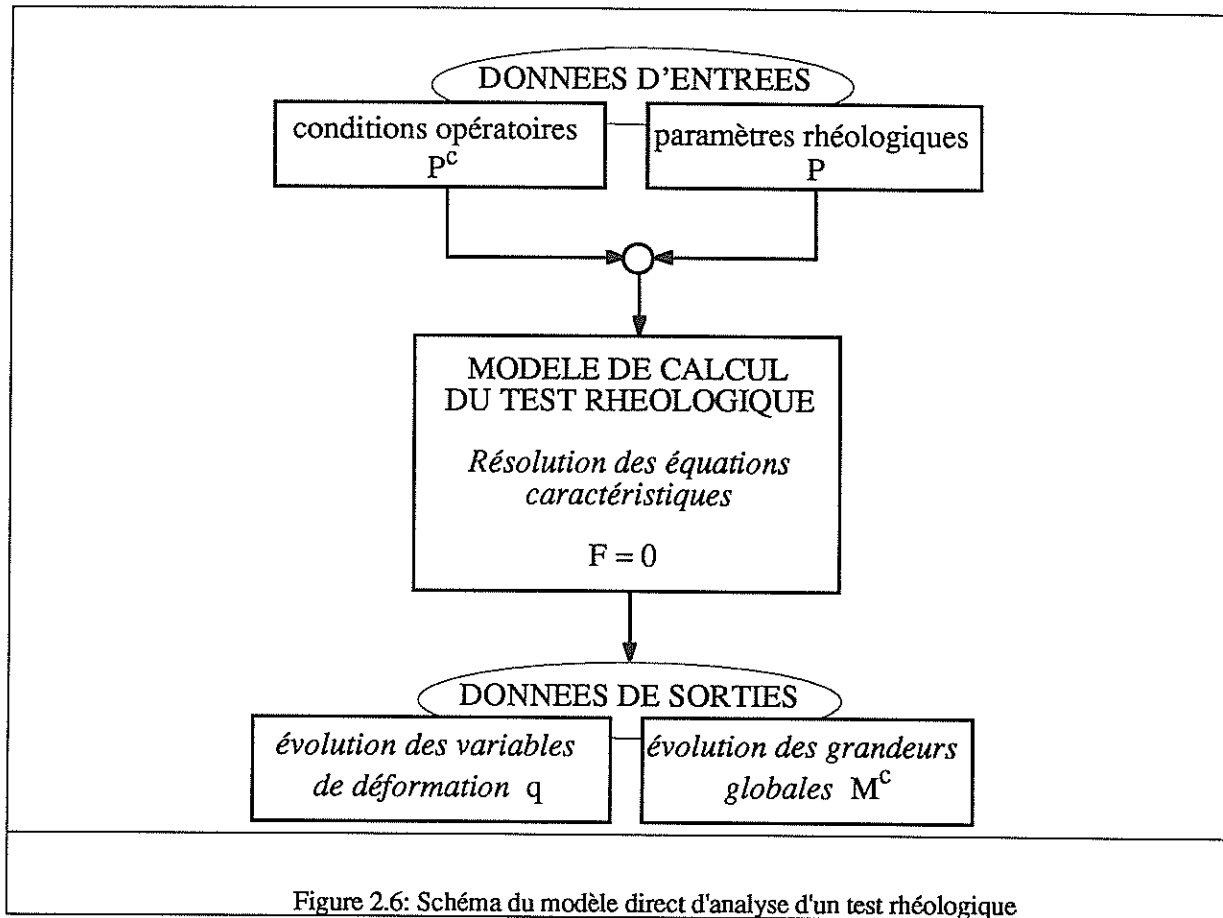
Évidemment, la résolution de ces équations permet de déterminer les variables internes q , et donc d'évaluer les grandeurs globales M^c (forces ou couples) avec une relation de type:

$$M^c = f(P, q, x, t) \quad (2.10)$$

Finalement, on représente le modèle direct d'analyse rhéologique par le schéma décrit sur la Figure 2.6.

Dans la littérature, on trouve peu d'analyses rhéologiques s'intéressant vraiment à une résolution complète des équations thermo-mécaniques. On distingue les démarches suivantes:

* classiques, en utilisant des hypothèses et des approximations qui permettent d'exprimer une contrainte équivalente moyenne et de calculer ainsi les forces et les couples (littérature des années 1930-1970). Des corrections thermiques sont effectuées à partir d'un équilibre établi entre l'énergie dissipée par la déformation et l'élévation d'énergie interne.



* résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies. On cite Lahoti et al. ([LAHOTI, 1975]) qui, partant d'une analyse mécanique simplifiée d'un test de compression et de torsion, calculent la distribution radiale-axiale de la température et prédisent l'auto-échauffement adiabatique dans l'éprouvette.

* résolution de l'équilibre mécanique et thermique par la méthode des tranches, partant d'une hypothèse de distribution radiale uniforme de la déformation, de la contrainte et de la température. Pour le test de torsion et traction, on cite Rauch et al. ([RAUCH, 1985]) et Semiatin et al. ([SEMIATIN, 1985], [SEMIATIN, 1986]).

* résolution locale de l'équilibre mécanique en utilisant la méthode des différences finies ([FONTAINE, 1992] - pour les tests de torsion et traction, [DWIVEDI, 1992] - pour un test de torsion).

* résolution locale complète des équations d'équilibre et du couplage thermo-mécanique par la méthode des éléments finis.

Dans le chapitre 3 on détaillera une méthode éléments finis capable de résoudre précisément l'ensemble des équations d'équilibre mécanique et thermique.

5. PROBLÈME RHÉOLOGIQUE INVERSE

5.1 DÉFINITION

Le but d'une étude rhéologique est de connaître le comportement du matériau, donc d'établir la relation de comportement f_r et déterminer les valeurs des paramètres $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ intervenant dans sa description. Les relations présentées au paragraphe 4 sont insuffisantes pour ce type de résolution qui nécessite alors des équations ou des informations supplémentaires. On utilise pour cela les réponses du système rhéologique M^{ex} correspondant à des conditions opératoires P^c bien définies. On obtient un problème inverse, car il faut trouver la relation constitutive f_r et ces paramètres P tels que:

$$M^{ex} = M^c(P) = f(P, q, x, t) \quad (2.11)$$

Les méthodes de dépouillement classiques sont généralement basées sur ce type de formulation. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, des hypothèses simplificatrices permettent de découpler l'équation d'équilibre et la loi rhéologique. On arrive ainsi à exprimer la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ uniquement en fonction des variables opératoires P^c et des mesures expérimentales. Ensuite, par une étude qualitative sur la variation de $\bar{\sigma}$ en fonction de $\dot{\bar{\epsilon}}$, $\bar{\epsilon}$ et T , on peut définir la loi, et pour des expressions simples, on peut déterminer les coefficients rhéologiques par une inversion directe de la relation (2.11) c'est à dire :

$$P = f^{-1}(M^{ex}, P^c) \quad (2.12)$$

En général ce type de résolution est valable uniquement pour des modèles rhéologiques développés à partir d'analyses mécaniques simplifiées. Pour des modèles plus complexes intégrant une résolution plus précise des équations thermo-mécaniques (2.6) et (2.7), une inversion du modèle direct de calcul est très difficile, voire impossible. Il faut dans ce cas utiliser la méthode d'identification paramétrique. Le principe est le choix a priori d'une certaine forme analytique pour la loi de comportement et la détermination des paramètres rhéologiques correspondants P pour lesquels on obtient la meilleure superposition entre les enregistrements expérimentaux M^{ex} et les valeurs calculées par le modèle direct M^c .

La superposition entre calcul et expérience est quantifiée à l'aide d'une fonction objectif $Q(M^c(P), M^{ex})$ respectant deux conditions principales:

(i) être définie semi-positive : $Q \geq 0$

(ii) $Q = 0$ si et seulement si $M^c = M^{ex}$

Ainsi la fonction Q admet un minimum global nul qui définit la superposition parfaite des courbes expérimentales et calculées. Le problème inverse se réduit alors à un problème de minimisation qui s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \text{trouver } \bar{P} \text{ tel que } Q(M^c(\bar{P}), M^{ex}) = \min_{P \in \mathcal{P}} Q(M^c(P), M^{ex}) \\ \mathcal{P} = \{P \mid h_{i_{min}} \leq h_i(P, q, x, t) \leq h_{i_{max}}, i = 1, \dots, r\} \end{cases} \quad (2.13)$$

L'espace paramétrique \mathcal{P} permet de définir l'ensemble des valeurs physiquement admissibles en tenant compte des contraintes introduites par les inégalités fonctionnelles h_i , où $h_{i_{min}}$ représente la valeur minimale et $h_{i_{max}}$ la valeur maximale. Par exemple pour une loi de type Norton-Hoff, la consistance doit toujours être positive et avoir une limite supérieure de façon à éviter les valeurs aberrantes, par exemple $0 \leq K_0 \leq 1000 \text{ MPas}^m$. La sensibilité à la vitesse de déformation doit respecter la condition de pseudo-plasticité: $0 \leq m(P, \dot{\epsilon}, T, x, t) \leq 1$.

La non-linéarité du modèle direct rend non-linéaire la fonction objectif et il faut utiliser une procédure itérative pour trouver le jeu optimal de coefficients rhéologiques.

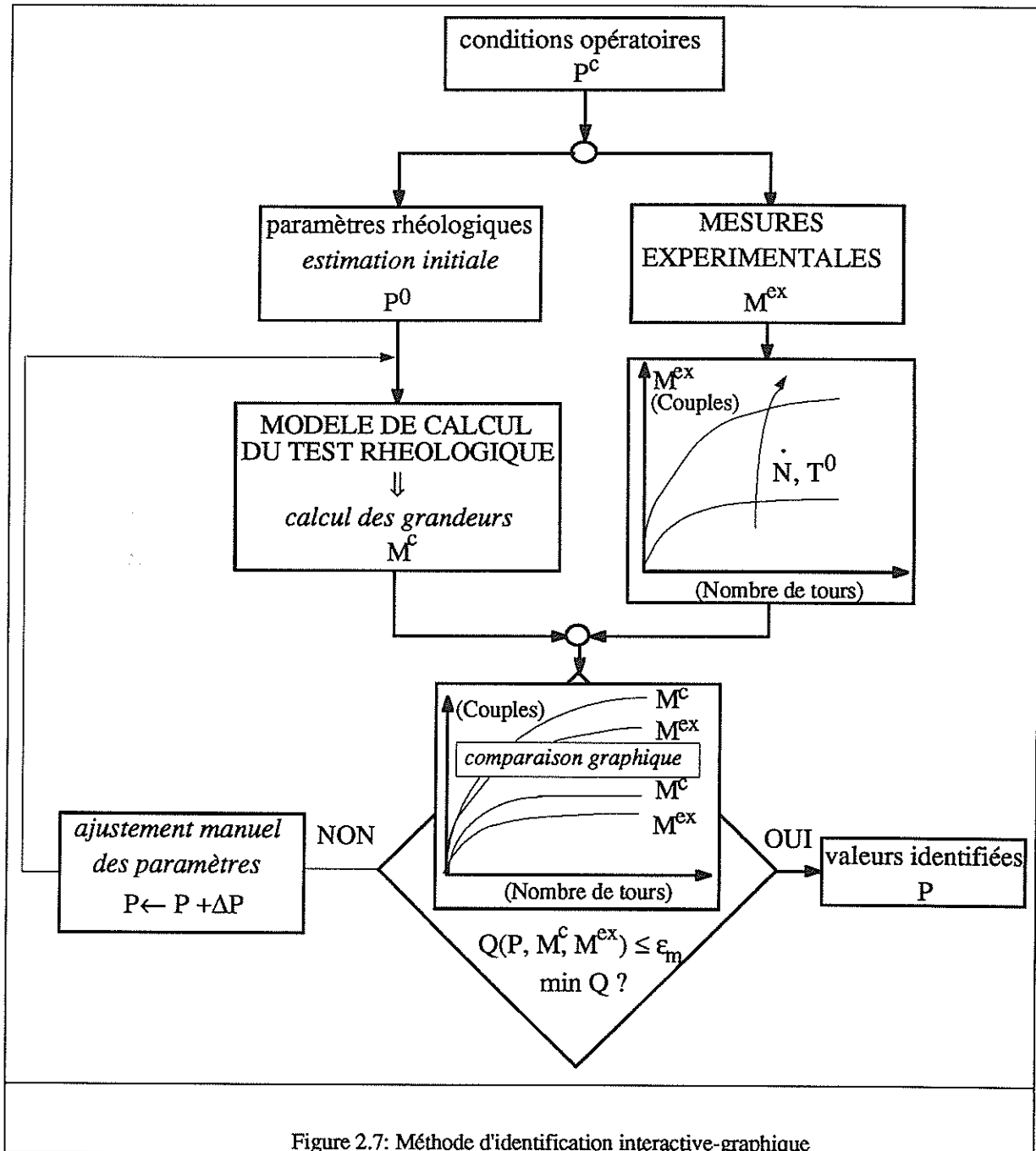
Des méthodes moins systématiques utilisent une résolution de type interactif (Figure 2.7) avec une recherche manuelle des valeurs paramétriques et une confrontation graphique entre les courbes expérimentales et les courbes calculées. Dans ce cas il est très difficile de trouver le jeu optimal des paramètres, surtout lorsque le nombre de paramètres est assez grand (≥ 3).

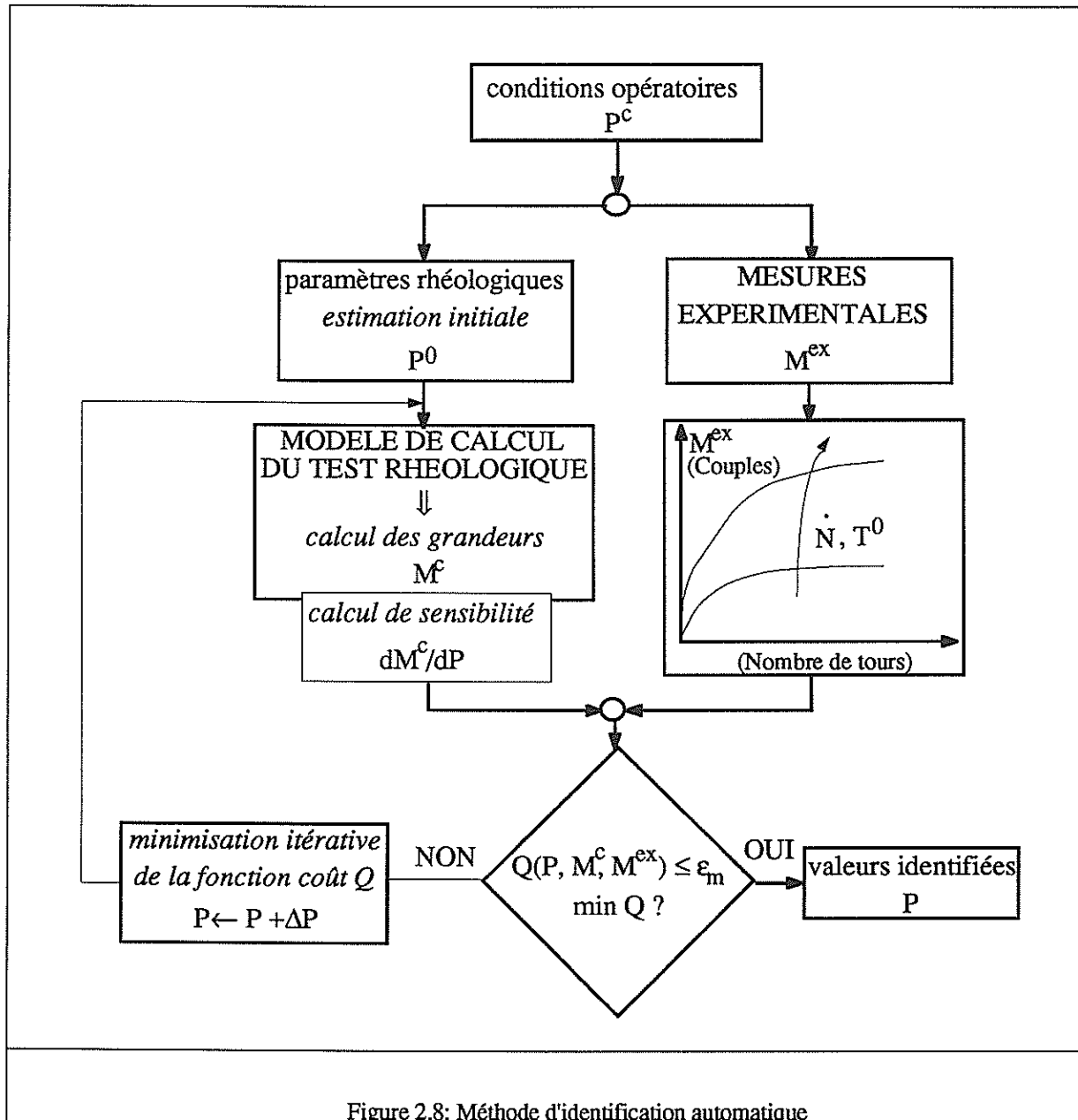
Pour avoir un contrôle plus rigoureux de l'évaluation quantitative des coefficients qui minimisent la fonction coût, on préfère utiliser une méthode automatique de type itératif (Figure 2.8). Le point essentiel de cette méthodologie réside dans le module d'identification des paramètres, défini par:

- * le choix de la fonction objectif.
- * la minimisation (algorithme, calcul de sensibilité $\frac{dM^c}{dP}$)
- * l'estimation des paramètres.

A partir de ce principe d'identification on peut établir des critères en ce qui concerne le choix d'une loi rhéologique. Ainsi en utilisant la valeur minimale de la fonction coût, on qualifiera volontairement comme modèle rhéologique le plus adéquat, celui qui conduit à la plus petite valeur de Q . La stratégie d'une étude rhéologique sera représentée dans ce cas par le schéma suivant:

- 1) choix du modèle rhéologique $i: f_r^i(P^i, \bar{\sigma}, \dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon}, T) = 0$
- 2) identification paramétrique $\Rightarrow P^i$ et $Q^i(M^c(P^i), M^{ex})$
- 3) si $i \leq n$ (nombre maximal de modèles) continue à partir de 1
- 4) sélection du modèle j pour lequel $Q^j \leq Q^i \forall i = 1, \dots, n$.





5.2 FORMULATION DE LA FONCTION OBJECTIF

La technique d'identification paramétrique est souvent considérée comme une procédure de régression des courbes expérimentales. On cherche ainsi les valeurs des paramètres pour lesquelles les grandeurs calculées avec le modèle direct M^c définissent les valeurs moyennes des points expérimentaux M^{ex} . Dans ce cas on peut écrire:

$$M_i^{ex} = M_i^c + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (2.14)$$

où ε_i représente les erreurs de calcul et de mesure (on néglige ici les erreurs dues au modèle rhéologique lui même).

Le but est de minimiser l'écart entre le calcul et l'expérience, donc de minimiser les erreurs ε_i . De ce point de vue, pour exprimer la fonction coût, on utilise une expression de type moindres carrées (MC) qui conduit à la formulation suivante:

$$Q(M^c(P), M^{ex}) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^s [M_i^{ex} - M_i^c]^2 \quad (2.15)$$

On adimensionalise souvent cette expression par une pondération uniforme et on obtient:

$$Q(M^c(P), M^{ex}) = \frac{\sum_{i=1}^s [M_i^{ex} - M_i^c]^2}{\sum_{i=1}^s [M_i^{ex}]^2} \quad (2.16)$$

Si les erreurs de mesures sont supposées proportionnelles aux valeurs expérimentales, c'est à dire si l'on a $\varepsilon_i = \varepsilon'_i M_i^{ex}$, on exprime Q en fonction des valeurs relatives ε'_i et on obtient:

$$Q(M^c(P), M^{ex}) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i'^2 = \sum_{i=1}^s \frac{[M_i^{ex} - M_i^c]^2}{[M_i^{ex}]^2} \quad (2.17)$$

D'une façon plus générale, nous avons la forme quadratique pondérée (MCP) définie par:

$$Q = \sum_{i=1}^s \beta_i [M_i^{ex} - M_i^c]^2 \quad (2.18)$$

où les β_i représentent les coefficients de pondération.

On vérifie simplement que pour toutes les expressions présentées, les conditions imposées dans § 5.1 sont entièrement satisfaites.

Si les grandeurs mesurées sont de type différent (couple et force pour un test de traction-torsion, force et diamètre minimal pour un test de traction), il faut introduire une fonction multi-objectifs. Dans ce cas on écrit:

$$Q = \sum_{k=1}^{nobs} \sum_{i=1}^s \beta_i^k [M_i^{kex} - M_i^{kc}]^2 \quad (2.19)$$

où $nobs$ représente le nombre de types d'observables (par exemple, pour un test de traction, si on mesure la force et le diamètre minimal, $nobs = 2$). Ceci permet de tenir compte simultanément, de l'influence des paramètres sur plusieurs types de grandeurs expérimentales.

Dans les analyses théoriques concernant les problèmes d'identification on rencontre des formulations plus générales faites à partir d'une approche statistique ([NORTON, 1986], [BONNET, 1992]). On cherche alors les paramètres qui maximisent la probabilité de prédiction des grandeurs mesurées. Pour des distributions de type Gauss cette fonction s'exprime en fonction des valeurs moyennes de mesures $m(M_i^{kex})$ (supposées égales aux valeurs calculées M_i^{kc}) et des déviations quadratiques dues aux erreurs de mesures: σ_i^{k2} . De même, on peut prendre en compte l'estimation initiale de certains paramètres, par des valeurs moyenne P_j^a et leurs déviations standards correspondantes σ_{pj}^2 . Finalement le problème est réduit à la minimisation de la fonction suivante:

$$Q = \sum_{k=1}^{nobs} \sum_{i=1}^s \beta_i^k [M_i^{kex} - M_i^{kc}]^2 + \sum_{j=1}^r \gamma_j [P_j - P_j^a]^2 \quad (2.20)$$

où $\beta_i^k = 1/\sigma_i^{k2}$ pour chaque $k = 1, \dots, nobs$ et $\gamma_j = 1/\sigma_{pj}^2$.

Le terme quadratique en P permet ainsi de limiter la recherche des paramètres dans le voisinage des valeurs initiales ou moyennes P^0 .

5.3 RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE

Pour résoudre un problème d'optimisation de type (2.13) on dispose de plusieurs méthodes ([GILL, 1981], [BATES, 1988], [MINKOWYCZ, 1988]) que l'on classifie dans les catégories suivantes:

- méthode de régression linéaire si l'expression de $M^c(P)$ est linéaire en P ou permet la linéarisation.
- méthodes d'évaluations successives de la fonction objectif pour différents jeux de paramètres choisis avec des critères de recherche linéaire (algorithme de type Simplex), génétique ou statistique (par exemple la méthode de type Monte-Carlo).
- méthodes de type gradient qui permettent la détermination des coefficients P par une méthode d'approximations successives faites à partir du calcul des paramètres de descente (direction et amplitude) en utilisant la valeur du gradient défini par $grad(Q) = dQ/dP$. Cette méthode nécessite une évaluation simultanée de la fonction coût et de son gradient.

Le choix d'une méthode ou d'une autre se fait par l'expérience et surtout en fonction du type de modèle direct de calcul, du degré de complexité lié à la résolution et des caractéristiques de la fonction coût: convexité, existence de plusieurs minima locaux ou présence de paliers. Pour des modèles non-linéaires il est en général préférable d'utiliser des méthodes itératives de type gradient.

5.3.1 Algorithme de minimisation

Le schéma général d'un algorithme de type gradient est présenté sur la Figure 2.9.

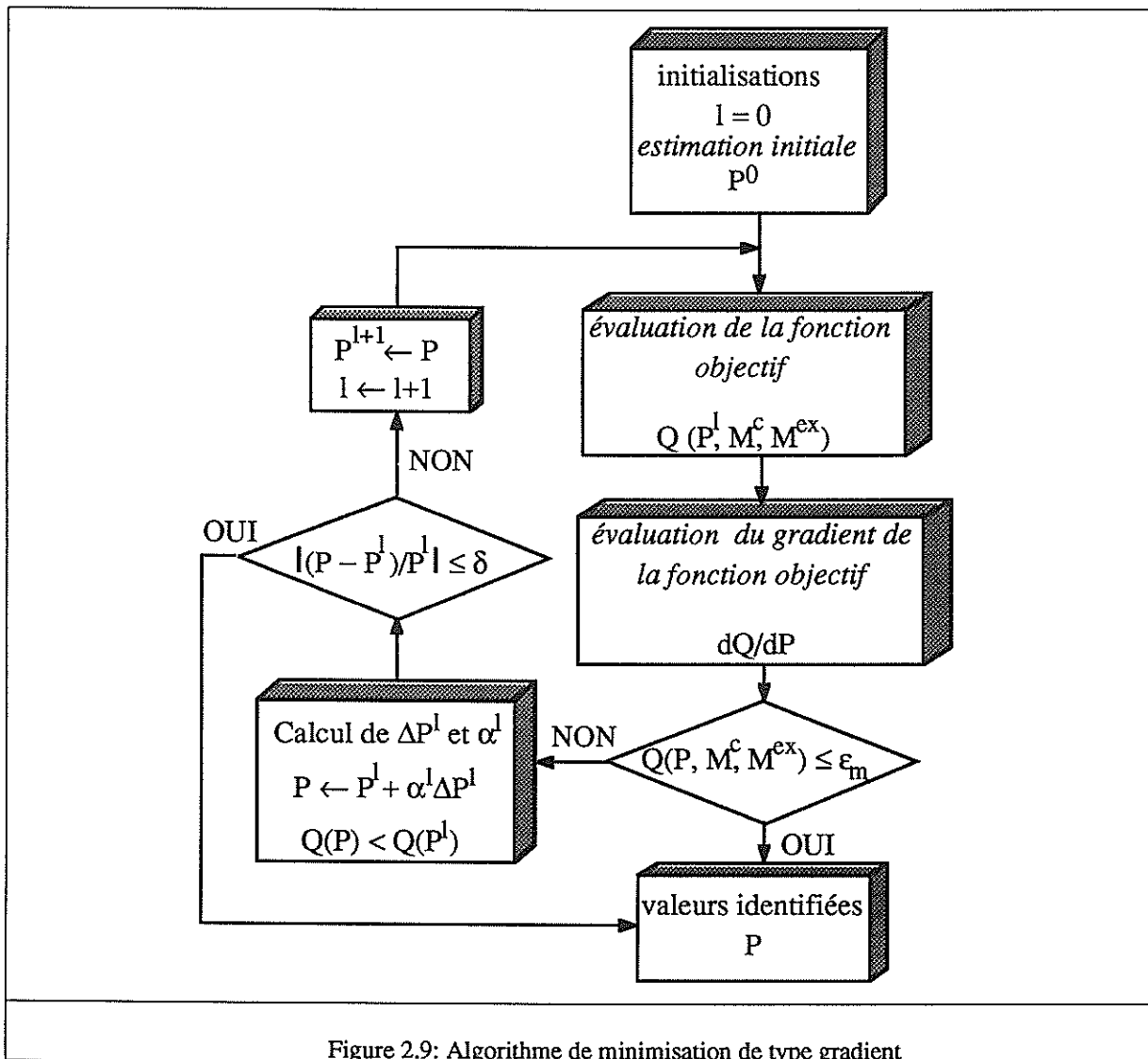


Figure 2.9: Algorithme de minimisation de type gradient

Pour amorcer la procédure numérique de recherche du minimum, on a besoin d'une estimation initiale des paramètres: $P^0 = \{P_1^0, P_2^0, \dots, P_n^0\}$. Les différences entre les ordres de grandeurs des paramètres sont éliminées en remplaçant les paramètres P par P/P^0 . Si $P^0 = 0$, on remplace P par $1-P$. Ainsi tous les paramètres ont une valeur initiale égale à 1. On calcule

ensuite une variation de paramètre ΔP^l , et le choix d'un paramètre de descente α^l nous permet d'obtenir la valeur P^{l+1} pour laquelle Q est le plus faible, c'est à dire:

$$\begin{cases} \alpha^l = \frac{\text{Argmin}\{Q(P^l + \alpha^l \Delta P^l)\} - P^l}{\Delta P^l}, i = 0, 1, \dots \\ P^{l+1} = P^l + \alpha^l \Delta P^l \end{cases} \quad (2.21)$$

Généralement le calcul de ΔP et de α peut être fait par différentes méthodes parmi lesquelles: la méthode du gradient conjugué et les méthodes de type Newton (ou Newton-Raphson). Des détails sur chaque type de résolution sont présentés dans [GILL, 1981].

Les expériences numériques en ce qui concerne la résolution des problèmes d'identification paramétriques montrent que l'on utilise fréquemment les méthodes de type Newton, ce qui permet d'avoir une convergence quadratique. Dans ce cas, on a besoin de calculer les dérivées secondes de la fonction coût afin de permettre la résolution d'équations non-linéaires: $dQ/dP = 0$ qui définissent la condition nécessaire d'existence d'un point optimal. Compte tenu de la difficulté à estimer avec précision les valeurs de d^2Q/dP^2 , on utilise des techniques d'approximation. Ainsi nous avons les méthodes de type quasi-Newton (BFGS par exemple), la méthode de type Gauss-Newton ou l'algorithme de type Marquardt.

Dans ce travail on a utilisé une méthode de type Gauss-Newton avec des améliorations numériques pour atteindre un compromis satisfaisant entre le nombre d'itérations et la stabilité.

5.3.2 La méthode de type Gauss-Newton

Un développement en série de Taylor d'ordre 1 permet d'écrire le gradient de la fonction coût sous la forme récursive suivante:

$$\frac{dQ}{dP}(P + \Delta P) = \frac{dQ}{dP}(P) + \frac{d^2Q}{dP^2}(P) \Delta P + o(\Delta P^2) \quad (2.22)$$

Une approximation pertinente de la variation ΔP est obtenue si on impose $\frac{dQ}{dP}(P + \Delta P) = 0$ et si on néglige les termes de degré supérieur à 1. On obtient ainsi le système linéaire:

$$\begin{cases} A \Delta P + B = 0 \\ A = \frac{d^2Q}{dP^2}(P) \\ B = \frac{dQ}{dP}(P) \end{cases} \quad (2.23)$$

Sans restreindre la généralité, on considère une fonction coût de la forme (2.18). Ainsi les composantes du gradient s'expriment alors par:

$$B_k = \frac{dQ}{dP_k}(P) = 2 \sum_{i=1}^s \beta_i (M_i^c - M_i^{ex}) \frac{dM_i^c}{dP_k} \quad (2.24)$$

et les éléments de la matrice qui contiennent les dérivées secondes par:

$$A_{jk} = \frac{d^2Q}{dP_j dP_k}(P) = 2 \sum_{i=1}^s \beta_i (M_i^c - M_i^{ex}) \frac{d^2M_i^c}{dP_j dP_k} + 2 \sum_{i=1}^s \beta_i \frac{dM_i^c}{dP_j} \frac{dM_i^c}{dP_k} \quad (2.25)$$

La méthode de type Gauss-Newton néglige les dérivées d'ordre 2 qui correspondent aux grandeurs calculées par le modèle direct, c'est-à-dire qu'on suppose $\frac{d^2M_i^c}{dP_j dP_k} \cong 0$. Dans ce cas il suffit de déterminer les dérivées premières qui définissent la matrice de sensibilité $S_{ik} = \frac{dM_i^c}{dP_k}$ et nous avons:

$$A_{jk} \cong 2 \sum_{i=1}^s \beta_i \frac{dM_i^c}{dP_j} \frac{dM_i^c}{dP_k} \quad (2.26)$$

Par la résolution du système linéaire (2.23) on obtient:

$$\Delta P = [S^T W S]^{-1} [S^T W] \Delta M \quad (2.27)$$

où W représente la matrice diagonale définie par $W_{ii} = \beta_i$ et ΔM est le vecteur déviation exprimé par $\Delta M_i = M_i^c - M_i^{ex}$ ($i = 1, \dots, s$).

L'avantage principal de cette méthode par rapport à une méthode de gradient simple, est qu'elle donne en même temps la direction et l'amplitude de la descente.

5.3.3 Traitement des contraintes

Généralement les contraintes sont introduites soit par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, soit par une méthode de pénalisation, soit en introduisant des transformations caractéristiques permettant d'éviter le domaine inadmissible. Dans tous les cas, le but principal est d'obtenir un problème de minimisation sans contraintes. Par la suite on propose l'utilisation des méthodes de transformation du domaine paramétrique.

La stratégie la plus simple consiste à projeter les fonctions de restriction h sur les hyperplans qui définissent les valeurs limites. On définit ainsi l'opérateur de projection Pr par:

$$\Pr(h_i) = \begin{cases} h_i & \text{si } h_{min} \leq h_i \leq h_{max} \\ h_{min} & \text{si } h_i < h_{min} \\ h_{max} & \text{si } h_i > h_{max} \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour le cas général, si les restrictions sont définies en fonction des variables internes du modèle de calcul (déformation, température), le principal inconvénient est que $grad(h_i)$ peut devenir nul si h_i est partout égal à la valeur extrême. Si par exemple nous avons une sensibilité à la vitesse de déformation qui dépend d'une façon linéaire de la température ($m = m_0 + m_1 T$), la condition $0 \leq m \leq 1$ peut se transformer partout en $m = 1$ ou $m = 0$ et donc les dérivées de la fonction coût Q par rapport à m_0 et m_1 seront nulles, ce qui empêche l'identification de ces coefficients. Pour éviter ce genre de problème, on peut utiliser la transformation définie par:

$$\begin{cases} \hat{h} = -\frac{\pi}{2} + \frac{h - h_{min}}{h_{max} - h_{min}} \pi \\ h = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} + \frac{h_{max} - h_{min}}{\pi} \arcsin[\sin(\hat{h})] \end{cases} \quad (2.29)$$

qui annule le gradient de la restriction pour une série discrète de points (dans l'exemple précédent définis par $T = -m_0/m_1$), la probabilité d'être confondus avec tous les arguments des restrictions étant faible.

Plus particulièrement, si par exemple $h_{min} = 0$ et $h_{max} = \infty$, on utilise la transformation:

$$\hat{h} = \begin{cases} h & \text{si } h \geq 0 \\ -h & \text{si } h < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

5.3.4 Techniques de régularisation

La convergence de l'algorithme de minimisation est fortement liée au choix des paramètres à identifier et de leurs valeurs initiales. On peut parfois avoir des solutions différentes à cause de l'existence éventuelle de plusieurs minima locaux de Q . Il existe aussi des situations dans lesquelles la matrice du système linéaire $A = \left[\frac{d^2 Q}{dP^2}(P) \right]$ a des valeurs propres nulles (nombre de conditionnement $cond(A)$ pratiquement infini), ce qui rend impossible le calcul de variation paramétrique ΔP . Dans tous ces cas on dit que le problème est mal posé.

Le problème d'unicité de solution est parfois résolu par un choix adéquat de valeurs initiales, en concordance avec les connaissances rhéologiques obtenues par des analyses classiques.

En ce qui concerne le conditionnement de la matrice A , les premières analyses doivent être orientées vers le choix de la loi de comportement et principalement vers le nombre de paramètres choisis pour l'identification. Dans ce dernier cas, il faut vérifier si les observables sont sensibles à tous les paramètres, et s'il existe une combinaison linéaire des lignes de la matrice de sensibilité S (on peut montrer que pour des fonctions coût écrites sous la forme (2.18), cette condition est équivalente au fait que le $\text{cond}(A)$ est infini [BECK, 1977]).

De façon plus systématique, on résout un problème mal posé en utilisant des techniques de régularisation qui limitent la zone de recherche des paramètres autour d'une valeur de référence. La solution sera ainsi définie par le jeu de paramètres qui se trouve le plus proche possible d'une valeur de référence représentée par l'estimation initiale ou précédente.

Les méthodes les plus utilisées sont celles de Tikhonov, Levenberg et Levenberg-Marquardt qui introduisent le terme de régularisation Q_r par:

$$Q^* = (1-\lambda) Q + \lambda Q_r \quad (2.31)$$

où $\lambda \in [0,1]$ représente le paramètre de régularisation.

a) La méthode de Tikhonov

La méthode de Tikhonov ([TIKHONOV, 1974]) utilise la forme générale de la fonction coût établie par la formulation statistique (2.20) avec $\gamma_j = 1$ et $P_j^a = P_j^0$. La fonction coût régularisée s'écrit sous la forme:

$$Q^* = (1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i [M_i^{ex} - M_i^c]^2 + \lambda \sum_{j=1}^r [P_j - P_j^0]^2 \quad (2.32)$$

Dans ce cas le gradient et les dérivées secondes sont définis par:

$$\frac{dQ^*}{dP_k}(P) = 2(1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i (M_i^c - M_i^{ex}) \frac{dM_i^c}{dP_k} + 2\lambda (P_k - P_k^0) \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2 Q^*}{dP_j dP_k}(P) \equiv 2(1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i \frac{dM_i^c}{dP_j} \frac{dM_i^c}{dP_k} + 2\lambda \delta_{jk} \quad (2.34)$$

où δ_{jk} représente le symbole de Kronecker. Si on note $\delta' = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ on obtient :

$$\Delta P = [S^T W S + \delta' I]^{-1} \{ [S^T W] \Delta M + \delta' I (P - P^0) \} \quad (2.35)$$

I étant la matrice unité.

Cette méthode est adaptée aux cas où la fonction Q présente des oscillations multiples. La convergence est très lente et dépend du choix du paramètre de régularisation λ . Généralement il faut faire un compromis entre l'accélération de la convergence et la stabilité induite par le terme de régularisation.

b) La méthode de Levenberg

L'idée de cette méthode est d'introduire le terme de régularisation en P d'une manière itérative ([MINKOWYCZ, 1988]). Ainsi à chaque itération l de Gauss-Newton, on cherche les valeurs P^l dans le voisinage des valeurs obtenues aux pas précédents P^{l-1} , et on définit la direction de descente comme un compromis entre la direction classique de Gauss-Newton ($\lambda = 0$) et la direction du gradient ($\lambda = 1$).

La fonction objectif régularisée, le gradient et les termes des dérivées secondes s'écrivent à chaque itération l sous la forme:

$$Q^{*l} = (1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i [M_i^{ex} - M_i^{cl}]^2 + \lambda \sum_{j=1}^r [P_j - P_j^{l-1}]^2 \quad (2.36)$$

$$\frac{dQ^{*l}}{dP_k}(P^{l-1}) = 2(1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i (M_i^{cl} - M_i^{ex}) \frac{dM_i^{cl}}{dP_k} \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2 Q^{*l}}{dP_j dP_k}(P^{l-1}) \cong 2(1-\lambda) \sum_{i=1}^s \beta_i \frac{dM_i^{cl}}{dP_j} \frac{dM_i^{cl}}{dP_k} + 2\lambda \delta_{jk} \quad (2.38)$$

Le calcul de la variation paramétrique s'exprime dans ce cas par:

$$\Delta P^l = [S^{lT} W S^l + \delta^l I]^{-1} [S^{lT} W] \Delta M^l \quad (2.39)$$

Cette méthode permet une convergence plus rapide que dans le cas d'une régularisation par la méthode de Tikhonov, mais le problème en ce qui concerne le choix du paramètre λ reste encore ouvert.

c) La méthode de type Levenberg-Marquardt

Marquardt propose une méthodologie de calcul de paramètre λ à chaque itération, de telle sorte qu'à l'approche du minimum, le facteur de régularisation devient nul. L'idée est d'utiliser une direction de descente proche de celle du gradient pour des valeurs éloignées du minimum et une direction de type Gauss-Newton dans le voisinage du minimum. On utilise ainsi la fonction coût écrite sous la forme :

$$Q^{*l} = (1-\lambda^l) \sum_{i=1}^s \beta_i [M_i^{ex} - M_i^{cl}]^2 + \lambda^l \sum_{j=1}^r \gamma_j^l [P_j - P_j^{l-1}]^2 \quad (2.40)$$

Les algorithmes classiques de type Marquardt utilisent des techniques empiriques pour définir le paramètre de régularisation à chaque itération de minimisation (par exemple la division ou la multiplication par 10 [SCHNUR, 1992]). Levenberg propose de déterminer le paramètre de régularisation par $\lambda^l = \frac{\delta^l}{1+\delta^l}$, où:

$$\delta^l = \frac{[grad(Q^l)] [\gamma] [grad(Q^l)]^T}{\sqrt{Q^l}} \quad (2.41)$$

Les coefficients de pondération des paramètres sont estimés à partir des termes diagonaux de la matrice S^TWS ([BECK, 1977]). On obtient ainsi l'expression:

$$\gamma_j^l = \sum_{i=1}^s \beta_i \left[\frac{dM_i^{cl}}{dP_j} \right]^2 \quad (2.42)$$

On peut vérifier (Annexe 2) que si $Q \rightarrow Q_{min}$ ou $Q \rightarrow 0$ ($M^c \rightarrow M^{exp}$) on obtient $\delta^l \rightarrow 0$ et donc la régularisation devient pratiquement nulle au voisinage du minimum. Pour éviter d'avoir une valeur de régularisation très grande au début de la minimisation et pour accélérer la convergence vers 0 on propose d'estimer λ^l par:

$$\lambda^l = \min(\lambda, \prod_{i=1}^{l-1} \lambda^i) \quad (2.43)$$

où λ représente ici une valeur de référence de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5} .

5.3.5 Amélioration du conditionnement de la matrice A

Il est établi que la précision de la résolution du système linéaire (2.23) dépend fortement du nombre de conditionnement de la matrice A, notamment s'il dépasse l'inverse de la précision de la machine, c'est à dire lorsque:

$$Cond(A) \varepsilon_M \geq 1 \quad (2.44)$$

où $\varepsilon_M = 10^{-15}$ pour une station RISC 6000 par exemple.

L'expérience numérique montre que pour les problèmes qui nous intéressent, on obtient $cond(A) \approx 10^{nbpar} - 10^{2 \times nbpar}$, et on en conclut que si le nombre des paramètres est supérieur à 8, la matrice peut devenir mal conditionnée. Il est vrai que les sous-itérations de recherche des

paramètres permettent dans certains cas de diminuer l'imprécision de la solution primaire ΔP . Mais pour des estimations initiales très éloignées de la solution, on peut avoir soit une convergence très lente, soit une divergence de la procédure numérique. Une première solution consiste dans une initialisation des paramètres à identifier à 1 pour chaque itération de minimisation. Ainsi on choisit de remplacer les paramètres P par P/P^l (l étant l'itération de résolution du système de Gauss-Newton).

La littérature montre que pour améliorer sensiblement le conditionnement d'un système linéaire, il faut utiliser des méthodes basées sur des techniques de factorisation et de préconditionnement. On propose de diminuer $cond(A)$ par la méthode qui consiste à réaliser une factorisation diagonale ([SCHNUR, 1992]). Ainsi on résout le système défini par:

$$A^* \Delta P^* = B^* \quad (2.45)$$

avec:

$$A^* = M^{-1/2} A M^{-1/2}, B^* = M^{-1/2} B \quad (2.46)$$

où M est une matrice diagonale telle que $diag(M) = diag(A)$. ΔP est obtenu à partir de ΔP^* par la relation:

$$\Delta P = M^{1/2} \Delta P^* \quad (2.47)$$

5.3.6 Calcul de sensibilité paramétrique

Le point essentiel de la méthode de Gauss-Newton est le calcul de la matrice de sensibilité S , car elle permet de déterminer le gradient B et la matrice A du système linéaire. Il faut donc connaître les dérivées des grandeurs M^c par rapport à tous les paramètres qui doivent être identifiés.

L'étude bibliographique menée systématiquement par Tortorelli et al. ([TORTORELLI, 1991]) montre que l'analyse de sensibilité paramétrique peut être faite:

- a) par différences finies,
- b) par un calcul analytique direct,
- c) par la formulation du problème adjoint,
- d) ou avec une évaluation semi-analytique.

Chaque méthode est caractérisée par la précision du calcul, le temps de calcul supplémentaire et le degré de complexité.

a) La méthode des différences finies

Le principe est de déterminer, avec le modèle direct de description du test rhéologique, les valeurs $M^c(P)$ et $M^c(P + \delta P)$, où δP représente une petite perturbation de paramètres. La définition d'une dérivée au sens de Gâteaux permet d'écrire:

- pour une dérivée à droite ($\delta P > 0$) ou à gauche ($\delta P < 0$):

$$\frac{dM_i^c}{dP_j} \equiv \frac{M_i^c(P + \delta P_j) - M_i^c(P)}{\delta P_j} \text{ où } i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, r \quad (2.48)$$

- pour une dérivée centrée:

$$\frac{dM_i^c}{dP_j} \equiv \frac{M_i^c(P + \delta P_j) - M_i^c(P - \delta P_j)}{2\delta P_j} \text{ où } i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, r \quad (2.49)$$

avec $\delta P_j = \{0, \dots, 0, \delta P, 0, \dots, 0\}$

Il est facile de constater qu'il faut passer par le modèle direct de calcul pour $r+1$ valeurs différentes des coefficients rhéologiques (si les dérivées sont à droite ou à gauche) ou pour $2r+1$ (si les dérivées sont centrées).

Du point de vue numérique, il faut choisir les niveaux de perturbations de telle façon que la précision soit la plus grande possible. On a besoin de plus d'accroître la précision sur les M_i^c . En ce qui concerne le temps de calcul, il faut savoir que plus le modèle direct est complexe, plus le temps de calcul supplémentaire devient grand. L'avantage principal de cette méthode réside dans la simplicité d'application et dans sa modularité.

b) La méthode analytique directe

Dans ce cas, le calcul des termes de sensibilité se fait par la différentiation directe de l'expression de calcul de M^c . Ainsi à partir de (2.10) on obtient:

$$\frac{dM^c}{dP} = \frac{\partial f}{\partial P} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial \hat{q}_k} \frac{d\hat{q}_k}{dP} \quad (2.50)$$

m étant le nombre des variables internes $\hat{q} = \{q, x\}$.

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$ est fait analytiquement, et il reste donc à déterminer les sensibilités paramétriques des variables internes $\frac{d\hat{q}}{dP}$. Si on tient compte du modèle de résolution rhéologique (§4), on peut différencier l'ensemble des équations fondamentales (2.9), et on obtient un système de sensibilités paramétriques représenté par $m \times r$ équations:

$$\frac{\partial F}{\partial P} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial \hat{q}_k} \frac{d\hat{q}_k}{dP} = 0 \quad (2.51)$$

On doit donc résoudre un système linéaire en $\frac{d\hat{q}}{dP}$. La complexité de calcul est liée seulement au calcul de $\frac{\partial F}{\partial P}$ et $\frac{\partial F}{\partial q}$. L'effort de calcul est établi en fonction du rapport entre le nombre des expressions de type (2.10) et le nombre des paramètres. Ainsi si le nombre des observables dépasse la taille du vecteur paramétrique ($nobs \geq r$), cette méthode est la plus adaptée.

c) *La méthode adjointe*

Il existe des cas où le nombre de paramètres est plus grand que celui des grandeurs mesurées ($nobs < r$). Le système de sensibilité écrit sous la forme (2.51) a alors une taille plus importante. Pour diminuer l'effort de calcul, on utilise la formulation du problème adjoint.

Soit la fonctionnelle adjointe définie par:

$$G = f + \lambda F \quad (2.52)$$

où λ est un vecteur de dimension égale au vecteur des variables internes \hat{q} . Le modèle direct donne $F = 0$ ce qui implique $f = G$.

La différentiation exacte de G par rapport aux paramètres P conduit à:

$$\frac{dG}{dP} = \frac{df}{dP} + \lambda \frac{dF}{dP} + \frac{d\lambda}{dP} F \quad (2.53)$$

Si on tient compte du fait que $F = 0$, le développement des autres termes dans (2.53) permet d'écrire:

$$\frac{dG}{dP} = \frac{df}{dP} + \lambda \frac{\partial F}{\partial P} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{q}_k} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{q}_k} \right) \frac{d\hat{q}_k}{dP} \quad (2.54)$$

Les termes $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial F}{\partial P}$ sont calculés analytiquement et pour éviter de déterminer les $m \times r$ valeurs de sensibilité $\frac{d\hat{q}}{dP}$, on élimine ces termes dans (2.54) par la condition:

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{q}} = 0 \quad (2.55)$$

On obtient un système linéaire en λ d'ordre $m \times nobs$. Pour résoudre ce système on calcule analytiquement $\frac{\partial f}{\partial \hat{q}}$ et $\frac{\partial F}{\partial \hat{q}}$.

Ainsi avec la relation (2.54) on exprime finalement $\frac{dG}{dP}$ et donc $\frac{df}{dP}$.

d) La méthode semi-analytique ou mixte

Certains auteurs proposent d'utiliser une méthode mixte qui consiste à calculer certains termes de sensibilité par la méthode de différentiation directe et d'autres par la méthode des différences finies. On peut imaginer plusieurs variantes. Par exemple, dans le cas de l'expression (2.50), on détermine analytiquement $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}}$. Pour le système de sensibilité, les termes $\frac{\partial F}{\partial P}$ sont calculés analytiquement et les termes $\frac{\partial F}{\partial \dot{Q}}$ le sont par différences finies. Finalement par la résolution du (2.51), on obtient les valeurs des $\frac{d\hat{Q}}{dP}$.

5.3.7 Procédure itérative de minimisation

On rencontre dans la littérature plusieurs variantes des algorithmes numériques de type Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt. La procédure que l'on a développée utilise des recherches linéaires sur la direction de ΔP issues de la résolution du système (2.23). Le principe est la recherche du minimum de la fonction coût dans le sens initial indiqué par l'algorithme de Gauss-Newton et, si ceci ne permet pas d'améliorer la valeur de Q , on effectue une recherche dans le sens opposé (situation probable dans le cas où l'on est très proche du minimum, ou quand le gradient est mal calculé).

On détaillera par la suite la procédure itérative de minimisation:

- 1) choix d'un jeu initial des paramètres P^0 et initialisation de l ($l = 1$).
- 2) calcul de la fonction coût Q^{l-1} , du gradient $B_k^l = \frac{dQ^{l-1}}{dP_k}$ et de la matrice $A_{jk}^l = \frac{d^2 Q^{l-1}}{dP_j dP_k}$.
- on peut introduire les variantes de régularisation et d'amélioration du conditionnement.
- 3) calcul de ΔP^l par la résolution du système $A^l \Delta P^l = B^l$ (principe de Gauss-Newton).
- 4) recherches de type linéaire:
 - 4.1) si $\Delta P^l B^l > 0$ on choisit $\Delta P^l = - \Delta P^l$ (car il faut trouver un minimum).
 - 4.2) initialisation du paramètre d'amélioration: $\alpha^0 = 1$; $i = 1$.
 - 4.3) calcul de $P^i = P^{l-1} + \alpha^{i-1} \Delta P^l$.
 - 4.4) test sur la diminution de la fonction coût Q (on doit calculer seulement Q).
 - si $Q(P^i) \geq Q^{l-1}$ on réactualise $\alpha^i = \alpha^{i-1}/2$ et on continue à partir de 4.3) avec $i = i+1$.
 - si $Q(P^i) < Q^{l-1}$ on garde $P^l = P^i$ et on continue à partir de 5).
 - si $i \geq 20$ ou $|P^i - P^{l-1}|/|P^{l-1}| \leq \delta$ (stagnation) on continue à partir de 7)
- 5) essais d'amélioration par sous-itérations.

- 5.1) si $Q(P^l) < \varepsilon_{max}$ on arrête.
- 5.2) si $i \geq 2$ continue à partir de 6)
- 5.3) initialisation du paramètre de descente: $\alpha^0 = 2, i = 1$.
- 5.4) calcul de $P^i = P^{l-1} + \alpha^{i-1} \Delta P^l$.
- 5.5) test sur les valeurs de la fonction Q .
 - si $Q(P^i) \leq Q^l$ on réactualise $\alpha^i = 2\alpha^{i-1}, P^l = P^i$ et on continue à partir de 5.4) avec $i = i+1$.
 - si $Q(P^i) > Q^l$ on garde P^l .
- 6) test de stagnation:
 - si $|P^l - P^{l-1}|/|P^{l-1}| \leq \delta$, le minimum est approximativement atteint en P^l et on arrête.
 - si $|P^l - P^{l-1}|/|P^{l-1}| > \delta$, on continue les itérations de Gauss-Newton à partir de 2).
- 7) on utilise des sous-itérations dans le sens inverse.
 - 7.1) initialisation du paramètre de descente: $\alpha^0 = 1, i = 1$.
 - 7.2) calcul de $P^i = P^{l-1} - \alpha^{i-1} \Delta P^l$.
 - 7.3) test sur la diminution de Q .
 - si $Q(P^i) > Q^l$ on réactualise $\alpha^i = \alpha^{i-1}/2$ et on continue à partir de 7.2) avec $i = i+1$.
 - si $Q(P^i) \leq Q^l, P^l = P^i$ et on continue à partir de 6).
 - si $Q(P^i) > Q^l$ et $|P^i - P^{l-1}|/|P^{l-1}| \leq \delta$ on arrête car la méthode diverge.

5.4 ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Du point de vue statistique, les valeurs des paramètres obtenues avec la procédure de minimisation sont des valeurs moyennes \bar{P} . Comme les mesures expérimentales sont des variables perturbées de façon aléatoire, il faut déterminer l'intervalle de confiance associé aux valeurs des paramètres identifiés. Généralement on caractérise les propriétés statistiques des données expérimentales par une matrice de covariance $V^{ex} = cov(M^{ex})$ qui contient les coefficients de dispersion (termes diagonaux) et les valeurs des corrélations (termes extra-diagonaux). De la même façon, on définit la matrice de covariance des paramètres $V^P = cov(P)$. Si la fonction coût est de la forme (2.18), on peut exprimer V^P à partir de la relation (2.27) qui définit le calcul de ΔP à la fin de la minimisation. Ainsi on obtient ([BECK, 1977]):

$$V^P = [S^T W S]^{-1} [S^T W] V^{ex} [W S] [S^T W S]^{-1} \quad (2.56)$$

où S représente la matrice de sensibilité correspondant aux valeurs moyennes \bar{P} obtenues à la fin du procédé de minimisation.

Les déviations et les coefficients de corrélations paramétriques s'expriment par:

$$\begin{cases} \sigma_{pj} = \sqrt{V_{jj}^p}, j = 1, \dots, r \\ \rho_{pjk} = \frac{V_{jk}^p}{\sqrt{V_{jj}^p V_{kk}^p}}, j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, r \end{cases} \quad (2.57)$$

Dans la plupart des cas, les distributions sont supposées de type Gaussien et pour 95% de confiance, on estime les valeurs paramétriques par:

$$\hat{P} = \bar{P} \pm 1.98 \sigma_p \quad (2.58)$$

Cependant les mesures expérimentales sont considérées comme indépendantes et la matrice V^{ex} est alors diagonale: $V_{ii}^{ex} = \sigma_i^2, i = 1, \dots, s$. Si les termes diagonaux sont égaux, c'est-à-dire si on a $\sigma_i^2 = \sigma_{ex}^2$, on estime la déviation expérimentale par:

$$\sigma_{ex}^2 = \frac{\sum_{i=1}^s [M_i^{ex} - M_i^c]^2}{s-r} \quad (2.59)$$

Si les erreurs de mesures sont proportionnelles aux valeurs mesurées, on considère:

$$\sigma_i^2 = \varepsilon^2 [M_i^{ex}]^2 \quad (2.60)$$

où ε représente le niveau d'erreur.

6. CONCLUSIONS

Le principal avantage de cette approche inverse est la possibilité d'intégrer des modèles de calcul plus complexes et plus sophistiqués. Ceci permet également de définir une méthodologie générale de dépouillement qui peut s'appliquer à un ensemble des tests rhéologiques, en évitant ainsi les particularités du calcul classique des contraintes, induites par les hypothèses simplificatrices utilisées pour décrire chacun de ces tests. On peut donc conclure que du point de vue quantitatif, la méthode est très performante.

La seule limitation de cette méthode est la nécessité d'avoir une formulation a priori de la loi de comportement. Le schéma d'identification séquentielle pour différents types de lois permet d'envisager une stratégie évolutive, qui consiste à introduire successivement des paramètres supplémentaires, en analysant la valeur de la fonction objectif obtenue à chaque nouvelle boucle d'identification.

Dans le chapitre suivant on présentera l'application de cette stratégie d'analyse rhéologique inverse en utilisant un modèle de calcul par éléments finis.

CHAPITRE 3

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES RHÉOLOGIQUES PAR L'ANALYSE INVERSE D'UN MODELE ÉLÉMENTS FINIS

1. INTRODUCTION

1.1 GÉNÉRALITÉS

On a vu dans les deux premiers chapitres que pour une analyse plus précise du comportement des matériaux, on a besoin d'intégrer la complexité de l'écoulement liée aux phénomènes thermo-mécaniques comme: l'écrouissage, l'adoucissement, la localisation due à un fort gradient thermique, le frottement. Ainsi l'ensemble des équations d'équilibre présentées dans le chapitre 2 (paragraphe 4), doit être résolu d'une manière plus précise afin de permettre des prédictions fiables en ce qui concerne l'évolution des grandeurs mécaniques et thermiques.

La résolution par la méthode des éléments finis est un outil numérique performant capable de satisfaire le besoin d'une analyse plus rigoureuse d'un test rhéologique. Son principal avantage est de pouvoir envisager des études plus fines, non seulement sur des aspects macroscopiques qui caractérisent les phénomènes de déformation, mais aussi en ce qui concerne le couplage microstructural lié par exemple à l'influence de la taille de grain et à l'évolution d'une anisotropie ou d'une texture.

Pour la validation d'une telle approche on se propose de concentrer nos efforts vers un modèle de calcul développé pour le cas d'un écoulement thermo-viscoplastique.

1.2 ÉTAT DE L'ART

Les développements des logiciels éléments finis ont permis à partir des années '70 - '80 une analyse du comportement des matériaux en utilisant une confrontation systématique entre le calcul et l'expérience. Les premières études ont été consacrées aux problèmes de calcul d'une structure dynamique. Ainsi dans [COLLINS, 1974], [BRONOWICKI, 1986] (code EF NASTRAN), [SCHWIBINGER, 1986], [ZHANG, 1987], [WEI, 1989] on applique un schéma d'identification automatique pour un calcul des paramètres de rigidité ou des

coefficients adimensionnels de correction pour les matrices de rigidité qui caractérisent la vibration d'une structure.

Des études sur la détermination des caractéristiques élastiques des matériaux (module d'élasticité E , coefficient de contraction transversale ν etc.) ont démarré vers le début des années '90. Par exemple Hendriks et al. ([HENDRIKS, 1990]) présentent une approche de type inverse dans le cas d'une étude sur les propriétés élastiques d'un matériau composite. Shnur et al. ([SHNUR, 1992]) présentent une étude sur la caractérisation d'un matériau avec des inclusions. Hoshiya et al. ([HOSHIYA, 1993]) appliquent la procédure d'identification pour des matériaux hétérogènes.

Pour un comportement non-linéaire, les premières études d'identification sont liées à une procédure interactive-graphique de confrontation entre le calcul éléments finis et les mesures expérimentales. Ainsi une succession de simulations est utilisée dans [KOPP, 1992] pour obtenir des coefficients thermiques ou de frottement en passant par des abaques. Pour améliorer les valeurs des coefficients rhéologiques intervenant dans une loi viscoplastique de type Norton-Hoff, Hirt et al. ([HIRT, 1989]) utilisent cette technique à partir des valeurs expérimentales des forces issues d'un test de compression d'éprouvettes tubulaires. L'expérience est simulée avec des logiciels éléments finis (ALPID ou LARSTRAN) et par des comparaisons graphiques avec les résultats expérimentaux, les paramètres rhéologiques sont ajustés afin d'obtenir une meilleure concordance. Une méthode similaire est présentée dans [KHODDAM, 1995]. Dans ce cas, par des simulations éléments finis d'un test de torsion on cherche la géométrie d'éprouvette de torsion (longueur et rayon de la partie utile, rayon maximal etc.) qui permet de diminuer l'erreur faite par une identification analytique.

L'application d'un principe d'identification automatique est relativement récent dans ce domaine. Ainsi Ledesma et al. ([LEDESMA, 1991]) utilisent cette procédure pour identifier les coefficients d'un modèle hyperbolique caractéristique de matériaux géologiques. En ce qui concerne la viscoplasticité on peut citer Jordan et al. ([JORDAN, 1993]) pour la détermination des paramètres décrivant le comportement d'un monocristal avec un modèle microstructural qui définit le glissement dans un système cristallographique. L'analyse est faite en petites déformations (max.0.4%) avec des tests cycliques de traction-compression ou de torsion.

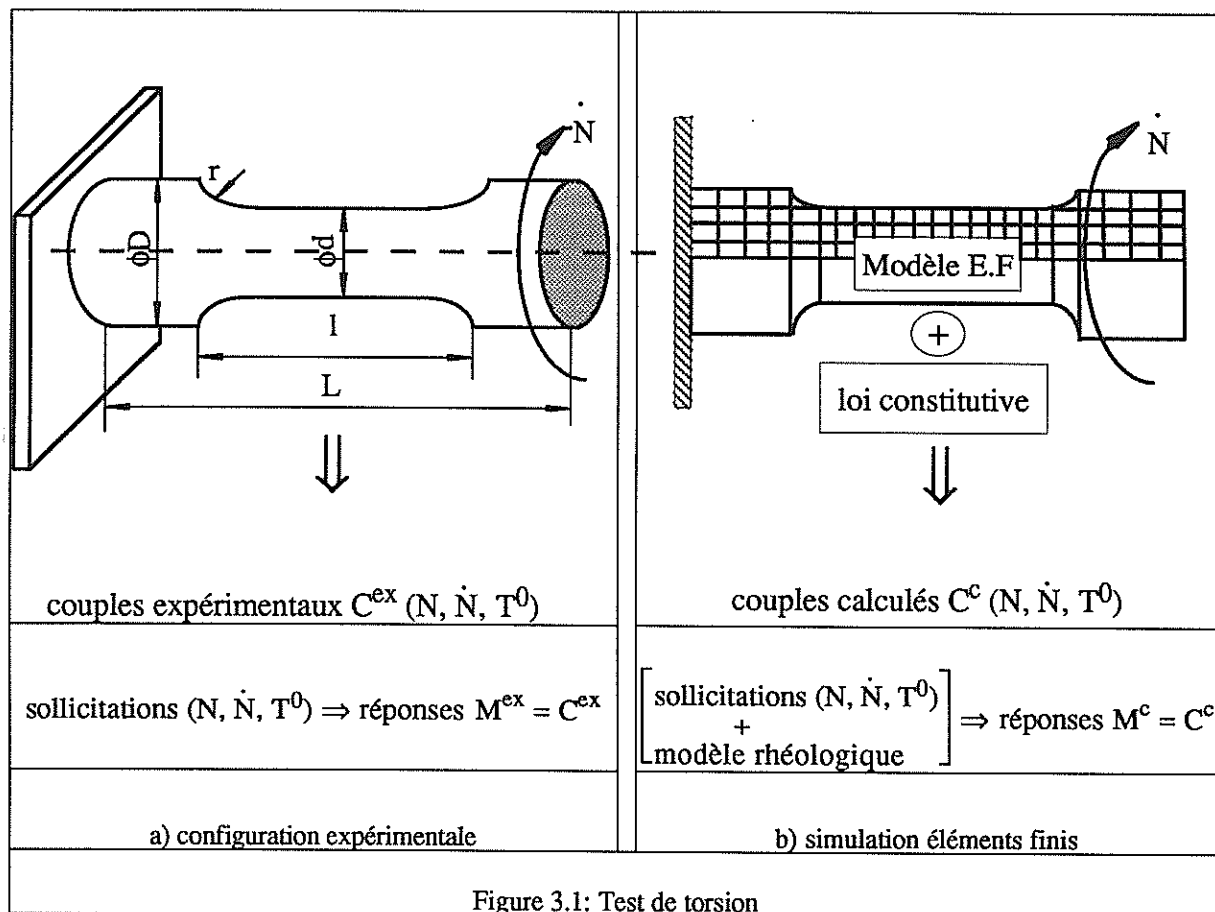
Pour des grandes déformations, les études sont très récentes. On cite Gelin et al. ([GELIN, 1994]) sur l'étude du comportement de l'aluminium à partir des tests de bipoinçonnement et Mahnken et al. ([MAHNKEN, 1994]) en ce qui concerne l'identification d'une loi de Steck pour aluminium à partir d'un test de traction plane.

Notre travail est basé sur un logiciel éléments finis capable d'identifier les paramètres rhéologiques d'une loi de type viscoplastique à partir de la simulation des tests axysymétriques de torsion, traction, traction-torsion ou compression. Le calcul d'identification intègre à la fois

un modèle direct, la simulation éléments finis de l'essai, et un modèle d'identification représenté par le calcul de sensibilité et d'optimisation.

1.3 FORMULATION DU PROBLÈME D'IDENTIFICATION

On considère, par exemple, un essai de torsion conçu pour des éprouvettes axisymétriques. Les informations expérimentales permettent de définir la variation des grandeurs globales (les couples) en fonction du temps et des différentes conditions opératoires (vitesse de rotation \dot{N} , température initiale T^0) choisies en fonction des régimes de déformations désirés. Sur la figure 3.1a) la configuration expérimentale du test est schématisée.



Donc pour un ensemble de sollicitations données on obtient des enregistrements expérimentaux M^{ex} qui intègrent l'influence du comportement du matériau. Avec un modèle éléments finis on peut déterminer l'évolution des grandeurs globales M^c dans les mêmes conditions que celles correspondant aux mesures expérimentales (figure 3.1b), mais à partir d'une connaissance a priori de la loi constitutive associée à l'écoulement du matériau. Un

couplage entre les données expérimentales et le modèle éléments finis, par l'intermédiaire d'un module d'optimisation, permet de définir le problème d'identification paramétrique. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'algorithme d'identification est basé sur la minimisation itérative d'une fonction coût $Q(P, M^c, M^{ex})$ définie à l'aide d'une distance quadratique entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées. La méthode de minimisation suppose un calcul de sensibilité des grandeurs globales $\frac{dM^c}{dP}$ spécifiques à la résolution par éléments finis. Le schéma d'identification correspondant est présenté à la Figure 3.2.

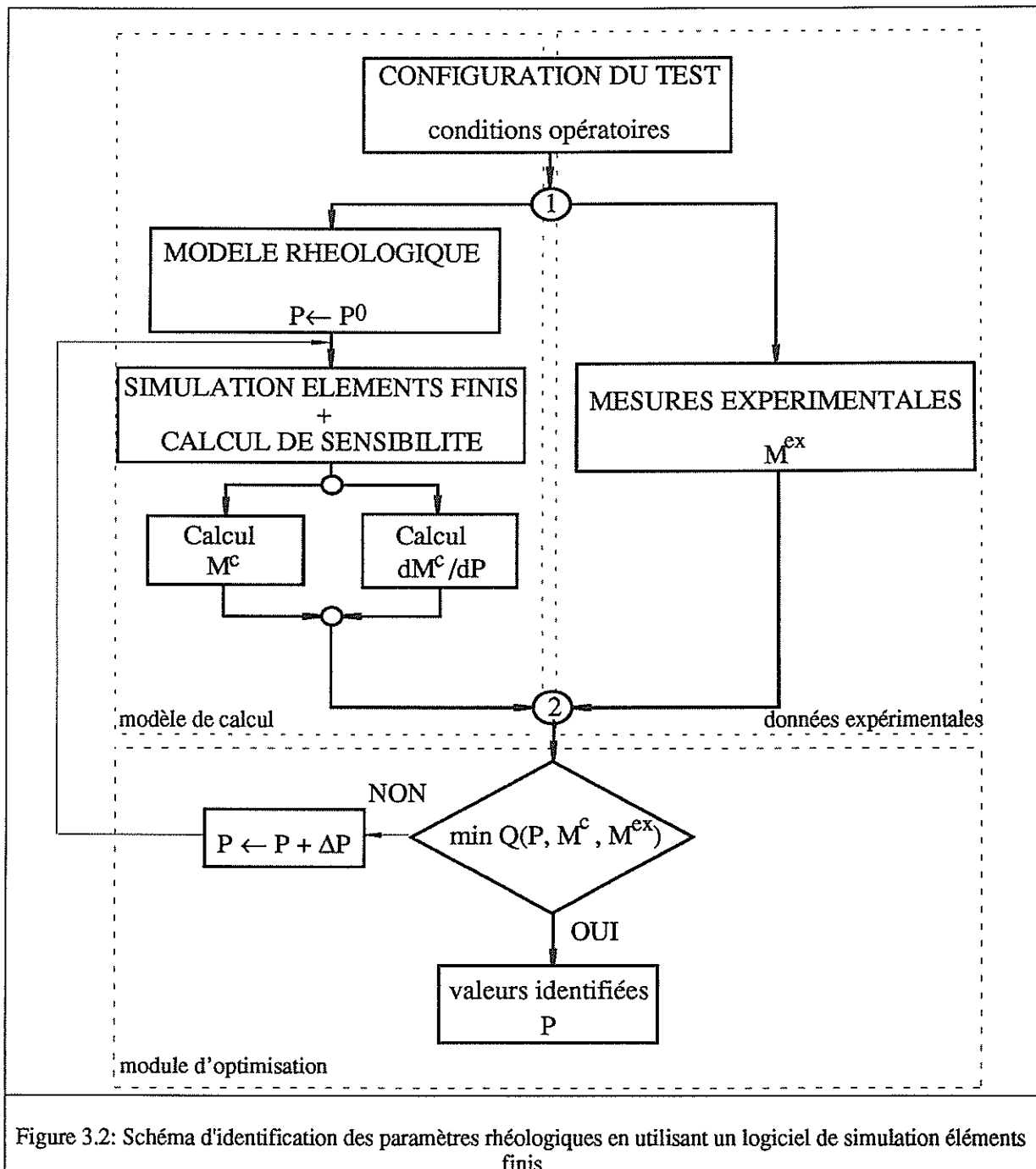


Figure 3.2: Schéma d'identification des paramètres rhéologiques en utilisant un logiciel de simulation éléments finis

Ainsi pour des valeurs initiales des paramètres P^0 on simule le test rhéologique avec le modèle numérique et on calcule M^{c0} et $\frac{dM^{c0}}{dP}$. Le module d'optimisation calcule la fonction objectif Q^0 ainsi que ses dérivées $\frac{dQ^0}{dP}$ et détermine un nouveau jeu de paramètres P pour lequel on obtient la valeur minimale de Q . La procédure est itérative et nécessite à chaque itération une évaluation de la fonction coût et de ses dérivées paramétriques, donc un passage par le module de simulation enrichi avec le calcul de sensibilité.

Le point essentiel de notre approche est le calcul de sensibilité. Un calcul analytique des dérivées paramétriques est fait à partir d'une différentiation directe des équations discrètes qui décrivent la résolution incrémentale du problème dans le modèle direct. Nous sommes ainsi capables de déterminer simultanément l'évolution d'une variable nodale ou globale et de ses dérivées par rapport aux paramètres rhéologiques.

Dans une première partie, nous présenterons brièvement le modèle direct de simulation numérique, en rappelant les équations thermomécaniques et la méthode de résolution. Dans une deuxième partie, on s'attachera à développer le calcul de sensibilité paramétrique qui caractérise le modèle inverse.

2. MODÈLE DIRECT: SIMULATION ELEMENTS FINIS

2.1 FORMULATION DU MODÈLE DE CALCUL

2.1.1 Approche cinématique

Soit une éprouvette axisymétrique qui subit une déformation plastique induite par un test de traction, de torsion ou de compression. Si on suppose que la symétrie est respectée pendant l'essai, la géométrie peut être exprimée en fonction des coordonnées cylindriques par:

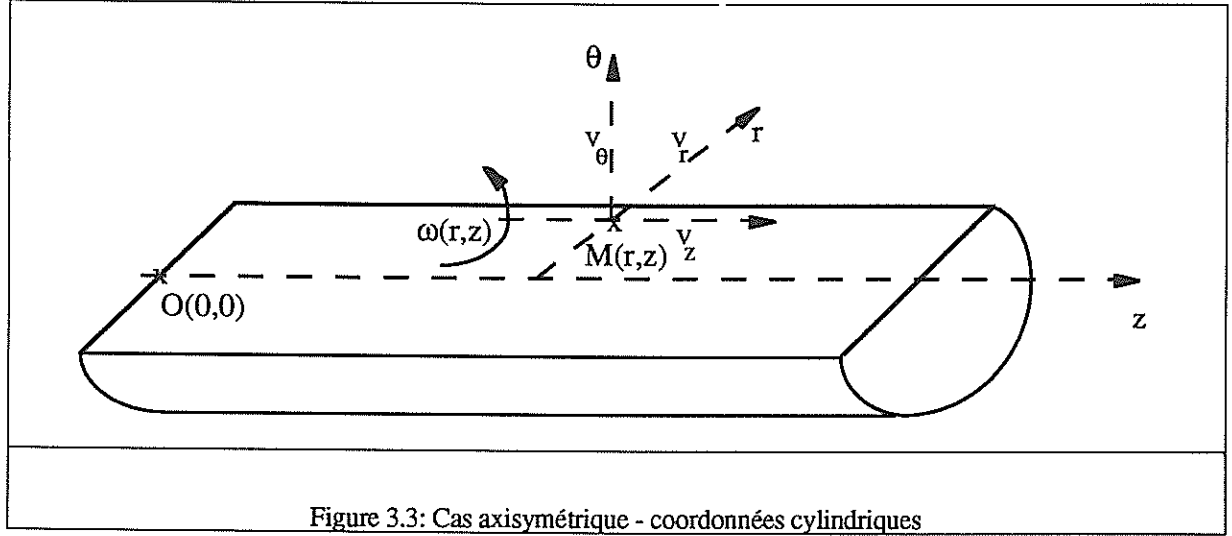
$$x = \begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où r représente la composante radiale et z est la composante axiale.

Le champ de vitesse v s'écrit dans ce cas en fonction des trois composantes sous la forme vectorielle suivante:

$$v = \begin{bmatrix} v_r(r,z) \\ v_\theta(r,z) \\ v_z(r,z) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

correspondant aux coordonnées cylindriques présentées sur la Figure 3.3.



La composante de rotation qui permet de décrire l'effet de torsion s'exprime en fonction de la vitesse angulaire ω avec la relation:

$$v_\theta(r,z) = r \omega(r,z) \quad (3.3)$$

On peut donc exprimer le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ par:

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ sym & \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ sym & sym & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Il est facile de vérifier que:

$$div(v) = tr(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.5)$$

Si on néglige l'effet de l'élasticité par rapport aux déformations viscoplastiques et si on prend en compte le phénomène de dilatation, assez important pour des essais à température élevée, le tenseur des vitesses de déformation s'exprime sous la forme additive suivante:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}^{dil} \quad (3.6)$$

où $\dot{\epsilon}^{vp}$ est la composante viscoplastique du tenseur des vitesses de déformation et $\dot{\epsilon}^{dil}$ est le terme de dilatation. Si on suppose que le matériau est homogène et isotrope, le terme de dilatation thermique s'écrit suivant la relation:

$$\dot{\epsilon}^{dil} = \alpha \dot{T} \mathbf{I} \quad (3.7)$$

où α représente le coefficient de dilatation linéaire, \dot{T} est la dérivée de la température par rapport au temps et \mathbf{I} est la matrice unité.

La dilatation locale du volume de l'éprouvette s'exprime ainsi par la condition:

$$\text{div}(v) = 3\alpha \dot{T} \quad (3.8)$$

2.1.2 Formulation de la loi constitutive

A partir d'une formulation monodimensionnelle de la loi rhéologique (voir la relation 1.1) on peut exprimer le tenseur déviateur des contraintes s en fonction du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique avec la relation:

$$s = f(P, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) \dot{\epsilon}^{vp} \quad (3.9)$$

où:

$$\begin{cases} f = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}} \\ \dot{\bar{\epsilon}} = \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{vp} : \dot{\epsilon}^{vp} \right]^{1/2} \\ \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(P, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) \end{cases} \quad (3.10)$$

Comme la déformation plastique est irréversible il faut formuler les lois constitutives en concordance avec le deuxième principe de la thermodynamique. De ce point de vue on cherche à définir les lois de comportement à l'aide d'un potentiel différentiable $\varphi(P, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T)$ tel que:

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^{vp}} \quad (3.11)$$

Dans ce cas on peut vérifier simplement que la dissipation $\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^{vp}} : \dot{\epsilon}^{vp} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}$ est définie positive et en conséquence l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée ([SOYRIS, 1990]). En ce qui concerne l'expression du potentiel, si la fonction f est continue, on obtient:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{3}{2} \int f \dot{\bar{\epsilon}} d\dot{\bar{\epsilon}} \\ \varphi|_{\dot{\bar{\epsilon}}=0} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Partant d'une loi monodimensionnelle de type (1.1) on obtient ainsi une loi tridimensionnelle admissible du point de vue de la thermodynamique des milieux continus. De plus ce formalisme permet de montrer que *le potentiel viscoplastique φ est convexe si et seulement si la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ est une fonction croissante de $\dot{\bar{\epsilon}}$* (voir Annexe 3).

On vérifie en particulier que les lois de Norton-Hoff et de Sellars et Tegart respectent cette condition par rapport à la dépendance de la vitesse de déformation. Ceci est très important car pour une résolution éléments finis, il est alors possible d'utiliser les principes variationnels.

Dans la suite on considérera une loi de type Norton-Hoff avec seuil (relation (1.44)) et on obtient:

$$\begin{cases} f(P, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) = \frac{2}{3} K_s \dot{\bar{\epsilon}}^{-1} + 2K(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}})^{m-1} \\ K_s = K_s(P, T), K = K(P, \bar{\epsilon}, T), m = m(P, \bar{\epsilon}, T) \end{cases} \quad (3.13)$$

où le seuil K_s , la consistance K et la sensibilité de la vitesse de déformation m s'expriment en fonction des paramètres rhéologiques P , de la déformation équivalente et de la température. Pour éviter la division par zéro en $\dot{\bar{\epsilon}} = 0$ on introduit un seuil de régularisation très faible $\dot{\bar{\epsilon}}_{reg}$ ([CESCUTTI, 1989]).

En utilisant (3.12), le potentiel viscoplastique correspondant s'écrit:

$$\varphi = K_s \dot{\bar{\epsilon}} + \frac{K}{m+1} (\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}})^{m+1} \quad (3.14)$$

2.1.3 Définition des conditions de contact et de la loi de frottement

Pour les surfaces qui sont en contact avec des outils $\partial\Omega_c$, les mors de serrage ou les tas de presse par exemple, il faut introduire des conditions limites spécifiques. On note v^{out} la vitesse d'outil en un point M situé sur l'interface outil/matière. Le vecteur vitesse v de la pièce en M est décomposé suivant la direction normale v_n et la direction tangentielle v_t (Figure 3.4).

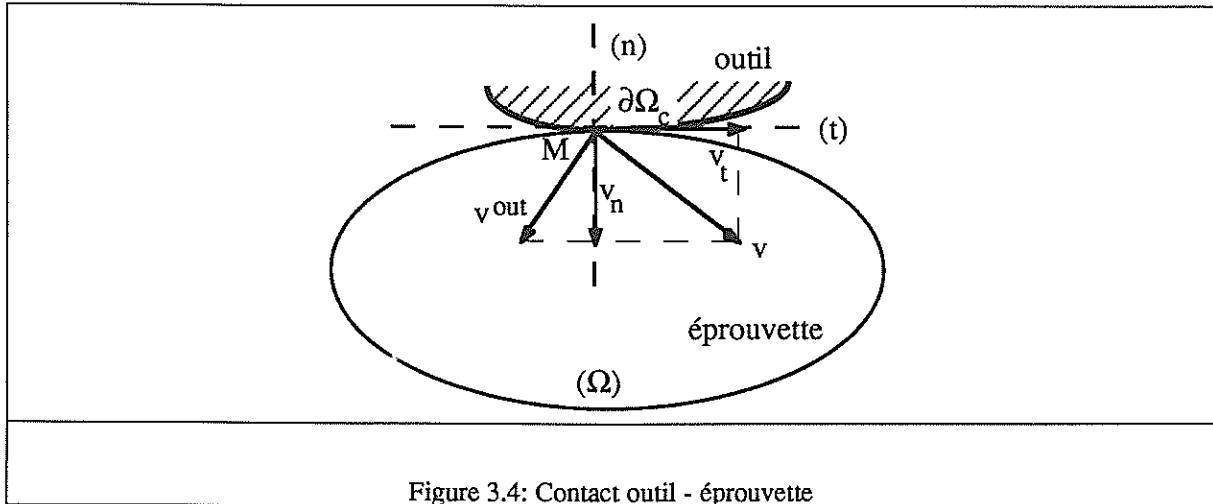


Figure 3.4: Contact outil - éprouvette

S'il s'agit d'un "contact collant" (par exemple serrage des mors en torsion ou en traction) on impose simplement la condition:

$$v - v^{out} = 0 \quad (3.15)$$

Si le contact est glissant (test de compression), on exprime la condition de non - pénétration par:

$$(v - v^{out}) \cdot n = 0 \quad (3.16)$$

ce qui impose au matériau de "suivre" l'outil dans la direction de la normale.

Dans ce cas il faut tenir compte du phénomène de frottement dû à la vitesse relative de glissement Δv_t qui s'exprime par:

$$\Delta v_t = [(v - v^{out}) \cdot u] u \quad (3.17)$$

où u représente le vecteur unitaire tangent ($n \cdot u = 0$).

Du point de vue macroscopique cette composante est liée à une cisssion τ qui définit, en chaque point de l'interface, la composante tangentielle du vecteur contrainte:

$$\tau = \sigma n \cdot u \quad (3.18)$$

Pour exprimer la cisssion on utilise des lois de frottement. Fréquemment ces lois supposent que la cisssion de frottement dépend de la vitesse tangentielle et on peut alors écrire:

$$\tau = -g(P_f / |\Delta v_t|) \Delta v_t \quad (3.19)$$

où P_f représente les coefficients caractéristiques de l'ensemble outil-interface-matière et $|\Delta v_t|$ est la norme de la vitesse relative de glissement.

Dans le cas d'un comportement de type (3.13) associé au matériau étudié, on considère que le frottement est dû au cisaillement d'un corps viscoplastique qui matérialise l'interface de contact. On choisit donc une loi puissance de type Norton:

$$g(P_f, |\Delta v_t|) = \alpha_f K(P, \bar{\epsilon}, T) |\Delta v_t|^{p_f+1} \quad (3.20)$$

où α_f est le coefficient de frottement et p_f le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement.

Cette loi reste cohérente avec (3.13) et permet de définir un potentiel convexe de frottement sous la forme:

$$\phi_{frot} = \frac{\alpha_f K}{p_f+1} |\Delta v_t|^{p_f+1} \quad (3.21)$$

En résumé, les conditions limites pour la surface de contact s'expriment à l'aide d'une condition en vitesse imposée (3.15) ou à l'aide d'une condition mixte: vitesse imposée suivant le vecteur normal (3.16) et contrainte imposée suivant la direction tangentielle (3.18).

2.1.4 Formulation faible de l'équilibre mécanique

Le problème mécanique formulé par (2.6) s'exprime en écrivant le principe des puissances virtuelles sous la forme intégrale suivante:

problème mécanique faible (formulation en vitesse et pression):

trouver le champ de vitesse v et de pression p tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v^* \in \mathcal{V}^*, \int_{\Omega} s : \dot{\epsilon}^* d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} T^d v^* dS - \int_{\partial\Omega_c} \tau v^* dS = 0 \\ \operatorname{div} v - 3\alpha\dot{T} = 0 \text{ sur } \Omega, (v - v^{out}) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \text{ et } v = v^d \text{ sur } \partial\Omega_v \end{array} \right. \quad (3.22)$$

où l'espace des fonctions tests \mathcal{V}^* est défini par:

$$\mathcal{V}^* = \left\{ v^* \in L^2(\Omega), \left| \begin{array}{l} v^* \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \\ v^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v \end{array} \right. \text{ et } \left| \begin{array}{l} \operatorname{Grad}(v^*) \in (L^2(\Omega))^3 \\ \operatorname{div} v^* - 3\alpha\dot{T} = 0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \right\} \quad (3.23)$$

et $L^2(\Omega)$ représente l'espace des fonctions de carré intégrable. Pour rendre la résolution moins coûteuse, on cherche une formulation uniquement en fonction du champ de vitesse v . On approxime alors la pression par une valeur \hat{p} définie par la relation:

$$\hat{p} = -\rho_p (\text{div } v - 3\alpha\dot{T}) \quad (3.24)$$

où ρ_p représente un coefficient de pénalisation très grand.

Si on utilise les potentiels différentiables définis dans §2.1.2 et 2.1.3 la résolution de l'équilibre mécanique est réduite à:

problème mécanique faible approché (formulation en vitesse):

trouver le champ de vitesse v tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ minimise } \Phi(v) = \int_{\Omega} \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\rho_p}{2} (\text{div } v - 3\alpha\dot{T})^2 \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} T^d v \, dS + \int_{\partial\Omega_c} \varphi_{frot} \, dS \\ (v - v^{out}) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \text{ et } v = v^d \text{ sur } \partial\Omega_v \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Le principal avantage de cette formulation est que la définition de la pression par (3.24) permet en même temps la prise en compte de l'équation d'incompressibilité par une pénalisation.

La convexité des potentiels viscoplastique et de frottement rend convexe la fonctionnelle $\Phi(v)$, ce qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Il est possible également de montrer que si $\rho_p \rightarrow \infty$ la solution (v, \hat{p}) du problème faible (3.25) tend vers la solution exacte du problème de l'équilibre mécanique (3.22).

Des exigences de précision numérique obligent la limitation de l'ordre de grandeur du coefficient ρ_p à 10^5 . Dans ce cas l'expérience numérique montre qu'on obtient une solution satisfaisante pour le champ de vitesse, mais avec des imprécisions importantes en ce qui concerne la pression.

Pour obtenir une meilleure approximation de la pression, on redéfinit l'équilibre mécanique en tenant compte des valeurs des vitesses obtenues par la résolution de l'équation (3.25). Une formulation faible donne alors:

trouver le champ de pression p tel que:

$$\begin{cases} \forall \psi \int_{\Omega} (\text{grad } p - \text{div } s) \psi \, d\Omega = 0 \\ p = n^t \cdot s \cdot n - n^t \cdot T^d \text{ sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (3.26)$$

où ψ représente un ensemble des fonctions tests.

Avec cette stratégie de résolution, l'ensemble (v, p) obtenu par (3.25) et (3.26) représente une solution plus précise de l'équilibre mécanique et permet de définir plus correctement le tenseur des contraintes σ .

2.1.5 Formulation faible de l'équilibre thermique

Pour résoudre le problème de l'équilibre thermique, défini dans le chapitre 2 par l'équation (2.7), on utilise une formulation faible. Après une intégration par parties on obtient la forme équivalente:

problème thermique faible :

trouver la température T telle que:

$$\begin{cases} \forall \psi \int_{\Omega} \rho c \frac{dT}{dt} \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} k \text{grad } T \cdot \text{grad } \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} r \dot{w} \psi \, d\Omega - \\ - \int_{\Sigma_e} q_e \psi \, dS + \int_{\Sigma_c} [h_{cd}(T - T_{out}) + q_f] \psi \, dS + \int_{\Sigma_f} [(h_{cv} + h_r)(T - T_a)] \psi \, dS = 0 \\ T(x, t=0) = T^0(x) \end{cases} \quad (3.27)$$

La puissance dissipée par la déformation plastique s'exprime avec la relation:

$$\dot{w} = \sigma : \dot{\varepsilon} = s : \dot{\varepsilon}^{vp} - 3\alpha p \dot{T} \quad (3.28)$$

Le flux de chaleur produit par le frottement s'écrit:

$$q_f = \beta_f \tau \Delta v_t \quad (3.29)$$

où le coefficient β_f est calculé en fonction de l'effusivité de la pièce b et de l'outil b^{out} par la relation:

$$\beta_f = \frac{b}{b + b^{out}} \quad (3.30)$$

Ainsi le couplage thermomécanique est réalisé d'une part par le terme de dilatation et par la thermo-dépendance de la rhéologie et d'autre part par le terme de chaleur interne générée par la déformation plastique ou par le frottement.

2.2 RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

2.2.1 Discrétisation temporelle

Comme le processus de déformation de l'éprouvette est non-stationnaire, les équations d'équilibre doivent être résolues à chaque instant t . La résolution par la méthode des éléments finis sera incrémentale et le temps total sera divisé en petits intervalles Δt .

Pour exprimer les variables de déformation on utilise une formulation de type Lagrangien réactualisé. Ainsi on résout le problème à un instant t sur la configuration correspondante Ω_t , en supposant l'équilibre réalisé à l'instant précédent $t - \Delta t$. La définition de la nouvelle configuration $\Omega_{t+\Delta t}$ est faite avec un schéma explicite de type Euler sous la forme:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \Delta t \quad (3.31)$$

Si l'évolution de l'éprouvette pendant la déformation plastique conduit à une pénétration de la matière dans l'outil (dans le cas de compression par exemple), la zone de contact est redéfinie par la projection orthogonale du volume de matériau qui tend à pénétrer dans l'outil.

2.2.2 Discrétisation spatiale

Le domaine initial Ω est discrétisé par la méthode des éléments finis. On utilise des éléments quadratiques soit de type quadrangles à 8 noeuds (Q2), soit de type triangles à 6 noeuds (P2). Les principales variables discrètes sont les valeurs nodales qui décrivent la géométrie $X = \{X_n\}$, la cinématique $V = \{V_n\}$ et la température $T = \{T_n\}$.

Avec le système des coordonnées cylindriques présenté sur la figure 3.3, on exprime le vecteur nodal des coordonnées géométriques et des variables cinématiques par:

$$X_n = \begin{bmatrix} R_n \\ Z_n \end{bmatrix} \text{ et } V_n = \begin{bmatrix} V_{rn} \\ \omega_n \\ V_{zn} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Une formulation plus précise de l'incompressibilité est obtenue grâce à une interpolation dans l'espace équivalent $x = (r^2, z)$ et $v = (rv_r, \omega, v_z)$. Dans une étude antérieure, Moal ([MOAL, 1992]) a choisi l'interpolation de la vitesse dans l'espace (rv_r, v_θ, v_z) . Les tests numériques de simulation d'une torsion pure montrent que pour un maillage non-structuré avec des triangles à 6 noeuds, dans les zones proches de l'axe de symétrie, on obtient un bruit numérique significatif en ce qui concerne la composante de torsion $\dot{\epsilon}_{r\theta}$ qui théoriquement devrait être quasiment nulle. Pour éviter ce problème on introduit les composantes nodales de la vitesse angulaire et on exprime la vitesse de rotation avec la relation (3.3). En termes de valeurs nodales, les variables d'interpolation correspondant au nouvel espace (x, v) sont définies par:

$$X_n = \begin{bmatrix} R_n^2 \\ Z_n \end{bmatrix} \text{ et } V_n = \begin{bmatrix} R_n V_{rn} \\ \omega_n \\ V_{zn} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

On choisit des éléments isoparamétriques, on utilise donc les mêmes fonctions d'interpolation $N = \{N_n\}$ pour exprimer les valeurs discrètes (exprimées avec l'indice h) des coordonnées spatiales, de la vitesse et de la température sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} X_n N_n \\ v_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n N_n \\ T_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} T_n N_n \end{array} \right. \quad (3.34)$$

où $Nbnoe$ représente le nombre total des noeuds. Les relations de conversion entre l'espace d'interpolation et celui de définition d'un système cylindrique s'exprime par:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_h = \sqrt{x_{1h}} \\ z_h = x_{2h} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} v_{rh} = \frac{v_{1h}}{\sqrt{x_{1h}}} \\ v_{\theta h} = \sqrt{x_{1h}} v_{2h} \\ v_{zh} = v_{3h} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Pour chaque élément, la correspondance entre l'espace réel et l'espace de référence permet de définir toutes les variables en fonction des coordonnées généralisées (ξ, η) . En utilisant le jacobien de volume J et de surface J^s (voir l'Annexe 4), les éléments de volume et de surface sont exprimés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Omega = 2\pi r_h |J| d\xi d\eta \\ dS = 2\pi r_h |J^s| d\eta \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Finalement, on exprime le tenseur vitesse de déformation en fonction du gradient du champ vitesse et de son transposé par:

$$\dot{\epsilon}_h = \frac{1}{2} (\text{Grad } v_h + (\text{Grad } v_h)^T) \quad (3.37)$$

Avec la relation (3.34) et en introduisant l'opérateur B , construit à partir des dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées nodales (Annexe 5), on obtient la forme condensée:

$$\dot{\epsilon}_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} B_n V_n \quad (3.38)$$

Comme on utilise des fonctions d'interpolation de type Lagrange C^0 , la discontinuité nodale au niveau de $\dot{\epsilon}_h$ nécessite une méthode de lissage. On montre ([FOURMENT, 1992]) qu'un lissage de type Orkisz (minimisation au sens des moindres carrés sur des différences finies locales) complété par des conditions limites ou cinématiques concernant l'incompressibilité, la symétrie et les surfaces libres (imposés par une méthode de pénalisation classique), est satisfaisante.

2.2.3 Formulation discrète de l'équilibre mécanique

On exprime le problème mécanique (3.25) sur le domaine discrétisé Ω_h en fonction des valeurs nodales de la vitesse V . Une intégration directe de la condition d'incompressibilité pénalisée pose un problème numérique particulier, lié à un phénomène de blocage des degrés de liberté. Pour éviter ce problème on doit tenir compte de la condition discrète de compatibilité

entre le degré d'interpolation du champ vitesse et la formulation discrète de la pression, établie par Brezzi et Babuska ([BREZZI, 1974]). Afin de respecter cette condition, on définit une approximation discrète de la pression, constante par élément, avec la relation:

$$\hat{p}_h = -\rho_p \text{Div } v_h \text{ où } v_h = v(x_h) \quad (3.39)$$

L'opérateur divergence discrète Div s'exprime comme la moyenne de divergence sur chaque élément:

$$\text{Div } v(x_h) = \frac{\int_{\Omega_{he}} (\text{div } v(x_h) - 3\alpha\dot{T}) d\Omega}{\int_{\Omega_{he}} d\Omega} \text{ si } x_h \in \Omega_{he} \quad (3.40)$$

où Ω_{he} représente le domaine discret associé à l'élément e .

On vérifie simplement que pour $Nbnoe \rightarrow \infty$ la solution en p tend vers l'expression (3.24).

Dans ce cas, la formulation variationnelle discrète obtenue à partir de (3.25) s'écrit:

problème mécanique éléments finis (formulation en vitesse):

trouver le champ de vitesse nodale V qui minimise la fonctionnelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_h(V) = \int_{\Omega_h} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega_h} \frac{\rho_p}{2} (\text{Div } v_h)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega_{hT}} T^d v_h dS + \int_{\partial\Omega_{hc}} \varphi_{h\text{frot}} dS \\ (V_n - V_n^{\text{out}}) \cdot \hat{n} = 0 \text{ pour } n \in \partial\Omega_{hc} \text{ et } V_n = V_n^d \text{ pour } n \in \partial\Omega_{hv} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

où \hat{n} représente la normale correspondant au noeud n qui appartient à la frontière discrétisée.

Dans la pratique le coefficient de pénalisation est adimensionalisé par une expression de type:

$$\rho_p = \rho_{pe} = \rho K_h(P, \tilde{\epsilon}, T) \quad (3.42)$$

où ρ est un coefficient numérique très grand de l'ordre de 10^5 à 10^7 .

La convexité de la fonctionnelle discrète permet de dire que la condition nécessaire et suffisante pour avoir le minimum est:

$$R_n(V) = \frac{d\Phi_h(V)}{dV_n} = 0, n = 1, \dots, Nbnoe' \quad (3.43)$$

où R_n représente le résidu ou le gradient de la fonctionnelle correspondant au noeud n et $Nbnoe' = Nbnoe$ - nombre des noeuds pour lesquels on doit respecter les conditions limites en vitesse.

Le problème mécanique se réduit alors à la résolution d'un système non-linéaire en fonction des vitesses nodales. La méthode numérique la plus utilisée est la méthode itérative de Newton-Raphson qui suppose le calcul de la matrice hessienne H définissant les dérivées secondes de la fonctionnelle discrète Φ_h :

$$H_{nk} = \frac{dR_n(V)}{dV_k} = \frac{d^2\Phi_h(V)}{dV_n dV_k}, k = 1, \dots, Nbnoe', n = 1, \dots, Nbnoe' \quad (3.44)$$

Si on tient compte de l'expression des fonctionnelles rhéologiques φ et de frottement φ_{frot} , données respectivement par (3.14) et (3.21), les composantes nodales du résidu s'écrivent:

$$R_n(V) = \int_{\Omega_h} s_h \cdot \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} d\Omega + \left(\int_{\Omega_h} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_h} \rho_{pe} (tr(\dot{\epsilon}_h) - 3\alpha \dot{T}) d\Omega \cdot \int_{\Omega_h} tr\left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n}\right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_{hT}} T^d N_n dS - \int_{\partial\Omega_{hc}} \tau_h N_n dS \quad (3.45)$$

où s_h et τ_h s'expriment à partir de (3.9) et (3.19) par:

$$\begin{cases} s_h = f_h \dot{\epsilon}_h^{vp} \\ \tau_h = -g_h \Delta v_{ht} \end{cases} \quad (3.46)$$

avec Δv_{ht} déterminé par la relation (3.17) écrite sous la forme discrète:

$$\Delta v_{ht} = [(v_h - v^{out}) \cdot u_h] u_h \quad (3.47)$$

A partir de (3.44) et (3.45) la matrice hessienne s'exprime par:

$$\begin{aligned}
 H_{nk}(V) = & \int_{\Omega_h} f_h \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_k} : \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} d\Omega + \int_{\Omega_h} \frac{2}{3 \dot{\epsilon}_h} \frac{\partial f_h}{\partial \dot{\epsilon}_h} \left(\dot{\epsilon}_h^{vp} : \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_k} \right) \left(\dot{\epsilon}_h^{vp} : \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega + \\
 & \left(\int_{\Omega_h} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_h} \rho_{pe} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_k} \right) d\Omega \cdot \int_{\Omega_h} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{hc}} g_h \frac{\partial \Delta v_{ht}}{\partial V_k} N_n dS + \\
 & \int_{\partial\Omega_{hc}} \frac{\partial g_h}{\partial |\Delta v_{ht}|} \frac{\partial |\Delta v_{ht}|}{\partial V_k} N_n dS \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_k}$ on utilise l'opérateur B et pour $\frac{\partial \Delta v_{ht}}{\partial V_k}$ et $\frac{\partial |\Delta v_{ht}|}{\partial V_k}$ on part de la relation (3.17) écrite sous la forme vectorielle en termes des vitesses nodales radiales, orthoradiales, longitudinales et des coordonnées nodales (voir (3.35)).

Pour une loi de type Norton-Hoff nous avons les expressions discrètes suivantes:

$$\begin{cases} f_h = (2/3) K_{sh} \dot{\epsilon}_h^{-1} + 2K_h (\sqrt{3} \dot{\epsilon}_h)^{m_h-1} \\ g_h = \alpha_f K_h |\Delta v_{ht}|^{p_f-1} \end{cases} \quad (3.49)$$

où les valeurs discrètes des fonctions rhéologiques sont définies en fonction des P, T_h et $\bar{\epsilon}_h$. Les dérivées $\frac{\partial f_h}{\partial \dot{\epsilon}_h}$ et $\frac{\partial g_h}{\partial |\Delta v_{ht}|}$ sont déterminées par:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_h}{\partial \dot{\epsilon}_h} = - (2/3) K_{sh} \dot{\epsilon}_h^{-2} + 2K_h \sqrt{3} (m_h-1) (\sqrt{3} \dot{\epsilon}_h)^{m_h-2} \\ \frac{\partial g_h}{\partial |\Delta v_{ht}|} = \alpha_f (p_f-1) K_h |\Delta v_{ht}|^{p_f-2} \end{cases} \quad (3.50)$$

Si on tient compte de la dépendance des termes résiduels en fonction de la rhéologie et des variables mécaniques et thermiques, on peut écrire l'équation caractéristique associée à la résolution du champ de vitesse (3.43) sous la forme condensée suivante:

$$\mathcal{R}(P, \bar{\epsilon}, X, V, T, \dot{T}, t) = 0 \quad (3.51)$$

2.2.4 Formulation discrète de l'équilibre thermique

Pour la résolution du problème thermique on utilise la même discrétisation géométrique que celle présentée au paragraphe 2.2.2. Le choix des fonctions d'interpolation N comme fonctions tests permet d'exprimer (3.27) par le système différentiel suivant:

$$C \frac{dT}{dt} + K T + F = 0 \quad (3.52)$$

où C est la matrice de capacité, K est la matrice de conductivité et F est le terme libre.

Les composantes de la matrice de capacité s'expriment par:

$$C_{ij} = \int_{\Omega_h} \rho c N_i N_j d\Omega \quad (3.53)$$

Pour les termes de la matrice de conductivité on écrit:

$$K_{ij} = K_{ij}^1 + K_{ij}^2 \quad (3.54)$$

où K_{ij}^1 s'exprime par le terme volumique:

$$K_{ij}^1 = \int_{\Omega_h} k \text{grad} N_i \text{grad} N_j d\Omega \quad (3.55)$$

et K_{ij}^2 par les termes surfaciques:

$$K_{ij}^2 = \int_{\Sigma_f} h_r N_i N_j dS + \int_{\Sigma_c} h_{cd} N_i N_j dS + \int_{\Sigma_f} h_{cv} N_i N_j dS \quad (3.56)$$

Le coefficient de rayonnement est déterminé à partir des valeurs discrètes de la température avec la relation:

$$h_r = \epsilon_r \sigma_r (T_h^2 + T_a^2)(T_h + T_a) \quad (3.57)$$

Les termes libres s'expriment en fonction des termes internes F_j^1 liés à la chaleur générée par la déformation plastique et le frottement et des termes surfaciques F_j^2 représentés par la conduction, la convection, le rayonnement ou par un flux extérieur de chaleur. Nous avons alors:

$$F_j = F_j^1 + F_j^2 \quad (3.58)$$

avec:

$$F_j^I = - \int_{\Omega_h} \dot{w}_h N_j d\Omega + \int_{\Sigma_c} q_{fh} N_j dS - \int_{\Sigma_e} q_{eh} N_j dS \quad (3.59)$$

$$F_j^2 = - \int_{\Sigma_c} h_{cd} T_0 N_j dS - \int_{\Sigma_f} h_{cv} T_a N_j dS - \int_{\Sigma_f} h_r T_a N_j dS \quad (3.60)$$

Pour la puissance dissipée par la déformation plastique, la formulation discrète conduit à l'expression suivante:

$$\dot{w}_h = s_h : \dot{\varepsilon}_h^{vp} - 3\alpha p_h \dot{T}_h = s_h : \dot{\varepsilon}_h^{vp} + 3\alpha \rho_{pe} \text{Div } v_h \dot{T}_h \quad (3.61)$$

En ce qui concerne la chaleur générée par frottement sur l'interface de contact on a:

$$q_{fh} = \beta_f \tau_h \Delta v_{h_t} = - \beta_f g_h | \Delta v_{h_t} |^p \quad (3.62)$$

L'équation caractéristique du problème thermique s'écrit donc sous la forme condensée suivante:

$$S(P, \bar{\varepsilon}, X, V, T, \dot{T}, t) = 0 \quad (3.63)$$

La résolution du système différentiel (3.52) est faite suivant un schéma de différences finies. On considère $\Delta t = cte$ et on cherche la solution qui correspond à un instant intermédiaire t' pour lequel on définit une température intermédiaire et une dérivée par rapport au temps avec les relations:

$$\begin{cases} T^{t'} = \alpha_1 T^{t-\Delta t} + \alpha_2 T^t + \alpha_3 T^{t+\Delta t} \\ \dot{T}^{t'} = (1-\gamma) \dot{T}^t + \gamma \dot{T}^{t+\Delta t} \\ \dot{T}^t = \frac{T^t - T^{t-\Delta t}}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.64)$$

Pour que le schéma soit du second ordre, Soyris ([SOYRIS, 1990]) montre que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ doivent s'exprimer par:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = (\frac{3}{2} - 2\alpha - \gamma) \\ \alpha_3 = (\alpha - \frac{1}{2} + \gamma) \end{cases} \quad (3.65)$$

où α et γ sont des coefficients numériques choisis pour que la solution soit stable. Les principaux schémas proposés sont: le schéma de Lees: $\alpha = 1/3$, $\gamma = 1/2$, le schéma de Dupont: $\alpha = 1/4$, $\gamma = 1$, le schéma de Crank-Nicholson: $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ et le schéma implicite: $\alpha = 0$, $\gamma = 3/2$. Les expériences numériques montrent que le plus adapté est le schéma implicite, car pour les autres on peut obtenir des fluctuations importantes de température dans le temps. Pour le premier incrément de calcul on utilise toujours le schéma de Crank-Nicholson.

La thermo-dépendance de certains coefficients intervenant dans la définition des termes de l'équation (3.52) est traitée en général par une méthode de linéarisation qui exprime C , K et F en fonction des températures aux pas précédents. Ainsi une grandeur quelconque W est exprimée à l'instant t' par une expression cohérente avec (3.64). En introduisant un opérateur B_T qui définit le schéma de calcul pour W' on obtient:

$$W' = B_T(W) = (\alpha_1 - \alpha_3)W^{t-\Delta t} + (\alpha_2 + 2\alpha_3)W^t \quad (3.66)$$

Il y a une exception au niveau du terme de rayonnement qui s'exprime à l'instant t' par une valeur moyenne définie avec la relation:

$$\langle h_r \rangle^t = \varepsilon_r \sigma_r [(T_t^2 + T_a^2)(T_t + T_a) + (T_t - T_{t-\Delta t})^2 (T_t + \frac{1}{3}T_a)] \quad (3.67)$$

Si on suppose que k , ρc , h_{cd} et h_{cv} ne dépendent pas de la température et si la distribution spatiale du flux extérieur est parfaitement connu, on obtient le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} C'T' + F' = 0 \\ C' = K^1 + K^2 + \frac{\gamma C}{\alpha_3 \Delta t} \\ F' = B_T(F^1) + F^2 + \frac{C}{\Delta t} [(1 - 2\gamma)T^t - (1 - \gamma)T^{t-\Delta t}] - \frac{\gamma C}{\alpha_3 \Delta t} (\alpha_1 T^{t-\Delta t} + \alpha_2 T^t) \end{cases} \quad (3.68)$$

Une résolution classique du système (en utilisant la méthode de Crout par exemple) permet de trouver T' et avec (3.64) on exprime finalement les valeurs nodales de la température $T^{t+\Delta t}$ et ses dérivées par rapport au temps.

Dans l'Annexe 6 on présente un exemple d'application de cette stratégie de résolution de l'équation thermique dans le cas d'un test de torsion à chaud avec une régulation inductive de la température.

2.2.5 Calcul de la pression nodale

Compte tenu de la formulation en vitesse (3.41), la pression calculée à partir de (3.39) (en utilisant l'opérateur divergence discrète $Div(v_h)$) suppose une valeur constante sur l'élément. Pour exprimer d'une façon plus précise le champ de pression, par des valeurs nodales $p = \{p_n\}$, après la résolution d'équation (3.51) par rapport au champ vitesse, on utilise une formulation de Galerkin de l'équation intégrale (3.26). La résolution par une méthode de moindres carrés conduit à:

trouver le champ de pression nodale p_n tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ minimise } F(p) = \sum_{k=1}^{nbnoe} \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega_h} (grad p_h - div s_h)_i N_k d\Omega \right]^2 \\ p_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} p_n N_n, s_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} s_n N_n \\ p_n = \hat{n}^t \cdot \hat{s} \cdot \hat{n} - \hat{n}^t \cdot T^d \text{ pour } n \in \partial\Omega_{hT} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

Contrairement à la partie 2.2.3 concernant le calcul des vitesses nodales V_n , où le tenseur déviateur des contraintes est défini aux points d'intégration, directement en fonction du champ de vitesses, on a besoin ici de déterminer les valeurs nodales s_n du déviateur des contraintes.

En utilisant la relation (3.9), on exprime s_n sous la forme suivante:

$$s_n = f(P, \bar{\epsilon}_n, \dot{\bar{\epsilon}}_n, T_n) \dot{\bar{\epsilon}}_n^{vp} \quad (3.70)$$

où:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_n^{vp} = B_o V_n - \alpha \dot{T}_n I \quad (3.71)$$

B_o étant l'opérateur qui définit formellement le lissage par Orkisz.

L'avantage de cette méthode est qu'on obtient une fonctionnelle quadratique $F(p)$ définie positive et convexe. Ainsi la minimisation de F se réduit à la résolution d'un système linéaire et symétrique en p exprimé par:

$$[A(X)] [p] = [B_p(s, X)] \quad (3.72)$$

qui définit l'équation caractéristique de résolution de la pression. En conformité avec (3.51) et (3.63) on peut l'écrire sous la forme condensée:

$$\mathcal{P}(P, \bar{\epsilon}, X, p, V, T, \dot{T}, t) = 0 \quad (3.73)$$

2.2.6 Résolution du couplage thermo-mécanique

L'ensemble des équations (3.51), (3.63) et (3.73) représente le système fondamental du modèle thermo-mécanique. Pour diminuer l'effort numérique de résolution et les problèmes de convergence, on préfère découpler les équations sur un incrément de temps (voir la figure 3.5).

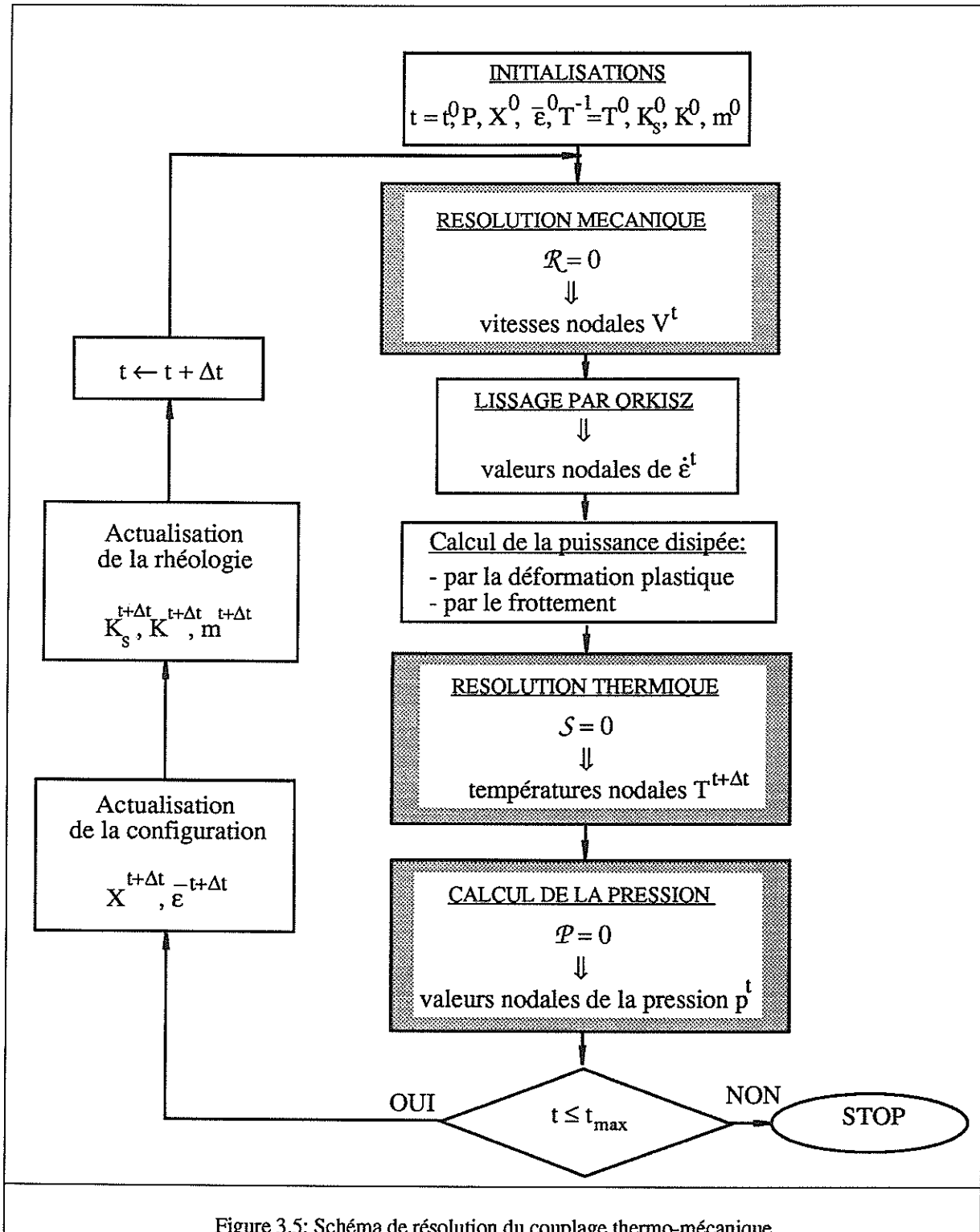


Figure 3.5: Schéma de résolution du couplage thermo-mécanique

Ainsi on suppose connue la configuration X^t à l'instant t ainsi que l'état de déformation $\bar{\epsilon}^t$ et la température T^t . L'équation (3.51) est alors résolue par rapport au champ de vitesse V^t . L'équation de la chaleur (3.63) est résolue par rapport à T^t avec le schéma de différences finies en supposant le champ de vitesse égal à V^t . On doit tenir compte ici de toutes les variables nodales correspondantes aux pas précédentes (la déformation équivalente, la vitesse), qui intervient dans la définition du terme libre d'équation thermique (la puissance dissipée par la déformation plastique et par le frottement). Enfin, l'équation de la pression (3.73) est résolue par rapport à p^t en utilisant les variables thermiques précédentes et les champs de vitesses actuels.

Finalement la résolution incrémentale du couplage thermomécanique peut s'écrire de la façon suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{R}(P, \bar{\epsilon}^t, X^t, V^t, T^t, \dot{T}^t) = 0 \\ \mathcal{S}(P, \bar{\epsilon}^t, X^t, V^t, T^t, \dot{T}^t, V^{t-\Delta t}, \bar{\epsilon}^{t-\Delta t}, T^{t-\Delta t}, \dot{T}^{t-\Delta t}) = 0 \\ \mathcal{P}(P, \bar{\epsilon}^t, X^t, p^t, V^t, T^t, \dot{T}^t) = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

avec les principales conditions aux limites:

$$\begin{cases} V^t = V^d \text{ sur } \partial\Omega_{h_v} \\ (V^t - V^{t_{out}}) \cdot \hat{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{h_c} \\ T(t=0) = T^0 \text{ sur } \Omega_h \end{cases} \quad (3.75)$$

La réactualisation de la configuration géométrique et de la déformation correspondante à l'instant $t+\Delta t$ est faite par le schéma explicite d'Euler :

$$\begin{cases} X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^t \\ \bar{\epsilon}^{t+\Delta t} = \bar{\epsilon}^t + \Delta t \dot{\bar{\epsilon}}^t \end{cases} \quad (3.76)$$

où la valeur nodale de la vitesse de déformation après lissage s'exprime par:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_n^t = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\bar{\epsilon}}_n^{vp} : \dot{\bar{\epsilon}}_n^{vp}} \quad (3.77)$$

A la fin de chaque incrément, la rhéologie du matériau est redéfinie à l'instant $t+\Delta t$ en fonction des paramètres rhéologiques P , de la déformation généralisée $\bar{\epsilon}^{t+\Delta t}$ et de la température $T^{t+\Delta t}$.

2.2.7 Remaillage et transport des variables

Pendant la simulation, la précision de calcul est évaluée à l'aide des estimateurs d'erreur mécanique et thermique, définis suivant une norme en énergie ([FOURMENT, 1992]). Cependant certains critères locaux (test de dégénérescence, du rayon de courbure, d'homogénéité, etc.) permettent d'indiquer l'apparition de distorsions géométriques qui perturbent la fiabilité de la résolution numérique. Ainsi, pour des éléments triangulaires quadratiques, on utilise un procédé de remaillage adaptatif, capable de générer un maillage optimal. La poursuite du calcul après un remaillage nécessite le transport de certaines grandeurs de l'ancienne grille vers la nouvelle. C'est par exemple le cas de la température et de la déformation.

La méthode la plus adaptée est le transport global par moindres carrés. Si q_h^{an} est le champ connu sur l'ancien maillage et q_h^{nv} le champ inconnu sur le nouveau maillage, le principe de transport revient à minimiser la fonctionnelle ϕ définie par:

$$\phi = \int_{\Omega_h} (q_h^{nv} - q_h^{an})^2 d\Omega \quad (3.78)$$

Si on tient compte de la méthode d'interpolation sur l'élément on a:

$$\begin{cases} q_h^{an} = \sum_{n=1}^{Anbnoe} q_n^{an} N_n \\ q_h^{nv} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} q_n^{nv} N_n \end{cases} \quad (3.79)$$

où $Anbnoe$ représente le nombre des noeuds de l'ancien maillage.

Après l'intégration de (3.78) sur le nouveau maillage, la minimisation de ϕ par rapport aux variables nodales q_n^{nv} conduit au système linéaire suivant:

$$S_{nk} q_k^{nv} = U_n \quad (3.80)$$

où:

$$\begin{cases} S_{nk} = \int_{\Omega_h} N_n^{nv} N_k^{nv} d\Omega \\ U_n = \int_{\Omega_h} q_h^{an} N_n^{nv} d\Omega \end{cases} \quad (3.81)$$

La résolution de (3.80) permet de déterminer les valeurs nodales des variables correspondant au nouveau maillage.

2.2.8 Calcul des grandeurs globales caractéristiques des tests rhéologiques

La résolution par éléments finis permet de connaître à chaque incrément de temps t les valeurs de toutes les variables internes $q = (\bar{\varepsilon}, X, V, p, T, \dot{T})$ qui caractérisent localement la déformation plastique. Ceci nous permet d'évaluer plus précisément certaines grandeurs globales M^c caractéristiques des tests mécaniques comme les couples C^c pour le test de torsion ou les forces F^c pour le test de traction ou de compression. On utilise généralement des éprouvettes avec des géométries normalisées (Figure 3.1) et on calcule le couple ou la force soit sur la surface $z = L$ (là où on fait des mesures), soit sur la surface équivalente $z = 0$, car les forces d'inertie sont négligées. Ainsi le couple de torsion s'exprime par:

$$C^c = C^c(P, q) = \int_0^{R_s} 2\pi s_{\theta z}(P, q) r^2 dr \quad (3.82)$$

et la force de traction ou compression par:

$$F^c = F^c(P, q) = \int_0^{R_s} 2\pi \sigma_{zz}(P, q) r dr \quad (3.83)$$

où R_s représente le rayon maximal de la section considérée, $s_{\theta z}$ la composante de cisssion du tenseur déviateur et σ_{zz} la composante axiale de contrainte.

En utilisant un schéma d'intégration de type trapèzes, on approxime les grandeurs globales à partir des valeurs nodales des contraintes sous la forme:

$$M^{ct} = M^c(P, q) = \sum_{k=1}^{nbns} [h(P, q_{k+1}) + h(P, q_k)] (r_{k+1}^t - r_k) \quad (3.84)$$

où $nbns$ représente le nombre des noeuds qui se trouvent sur la section choisie. La fonction d'intégration h est définie par:

$$h(P, q) = \begin{cases} \pi s_{\theta z}(P, q) r^2 & \text{pour un couple} \\ \pi \sigma_{zz}(P, q) r & \text{pour une force} \end{cases} \quad (3.85)$$

3. MODÈLE INVERSE: CALCUL DE SENSIBILITÉ

La matrice de sensibilité $[S]$ est définie à partir des dérivées des grandeurs observables M^c par rapport aux paramètres à identifier P :

$$S_{ij} = \frac{dM_i^c}{dP_j} \text{ pour } i = 1, \dots, s \text{ et } j = 1, \dots, r. \quad (3.86)$$

Pour le calcul de la matrice de sensibilité on choisit la méthode de différentiation directe. Dans ce cas le calcul de la fonction objectif et de ses dérivées par rapport aux paramètres est fait en même temps. Par rapport à la méthode de différences finies qui nécessite au moins $r+1$ calculs de simulation, avec une précision très supérieure, cette méthode est moins coûteuse en temps de calcul. De plus la précision numérique des dérivées est plus élevée car on utilise des termes analytiques obtenus à partir des expressions qui interviennent dans le calcul des grandeurs globales et locales.

3.1 CALCUL DE LA MATRICE DE SENSIBILITÉ

A partir de la relation (3.84), la dérivation analytique par rapport aux paramètres rhéologiques conduit à l'expression:

$$\begin{aligned} \frac{dM^c(P, q)}{dP} = \sum_{k=1}^{nbns} \left[\frac{dh(P, q_{k+1})}{dP} + \frac{dh(P, q_k)}{dP} \right] (r_{k+1} - r_k) + \\ [h(P, q_{k+1}) + h(P, q_k)] \left(\frac{dr_{k+1}}{dP} - \frac{r_k}{dP} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

avec $\frac{dh}{dP}$ défini par:

$$\frac{dh(P, q)}{dP} = \begin{cases} \pi \frac{ds_{\theta z}(P, q)}{dP} r^2 + 2\pi r s_{\theta z}(P, q) \frac{dr}{dP} \text{ pour une dérivée de couple} \\ \pi \frac{d\sigma_{zz}(P, q)}{dP} r + \pi \sigma_{zz}(P, q) \frac{dr}{dP} \text{ pour une dérivée de force} \end{cases} \quad (3.88)$$

On a alors besoin de calculer les dérivées des contraintes et des coordonnées radiales.

Si on dérive la relation de définition de la contrainte on obtient:

$$\frac{d\sigma}{dP} = -\frac{dp}{dP} I + \frac{ds}{dP} \quad (3.89)$$

avec:

$$\frac{ds}{dP} = \frac{\partial s}{\partial P} + \frac{\partial s}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}}{dP} + \frac{\partial s}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dP} + \frac{\partial s}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dP} + \frac{\partial s}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dP} + \frac{\partial s}{\partial \dot{T}} \cdot \frac{d\dot{T}}{dP} \quad (3.90)$$

Les expressions (3.89) et (3.90) font intervenir les dérivées paramétriques de toutes les variables nodales qui décrivent la résolution discrète du problème direct. Par exemple, si on utilise la relation (3.9) on obtient:

$$\frac{ds}{dP} = \sum_{q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\}} \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dP} \dot{\epsilon}^{vp} + f \frac{d\dot{\epsilon}^{vp}}{dP} + \frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}} \left(\dot{\epsilon}^{vp} \cdot \frac{d\dot{\epsilon}^{vp}}{dP} \right) \dot{\epsilon}^{vp} \quad (3.91)$$

Le calcul du tenseur des vitesses de déformation nodales est fait par la méthode de lissage d'Orkisz (relation (3.71)) et on a donc:

$$\frac{d\dot{\epsilon}^{vp}}{dP} = \left[\frac{\partial B_o}{\partial X} \frac{dX}{dP} \right] V + B_o \frac{dV}{dP} - \alpha \frac{d\dot{T}}{dP} I \quad (3.92)$$

Pour la loi de type Norton-Hoff nous avons:

$$\begin{cases} q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\} \\ \frac{\partial f}{\partial q} = (2/3) \frac{\partial K_s}{\partial q} \dot{\epsilon}^{-1} + 2 \frac{\partial K}{\partial q} (\sqrt{3} \dot{\epsilon})^{m-1} + 2K \frac{\partial m}{\partial q} (\sqrt{3} \dot{\epsilon})^{m-1} \ln(\sqrt{3} \dot{\epsilon}) \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}} = - (2/3) K_s \dot{\epsilon}^{-2} + 2K\sqrt{3} (m-1) (\sqrt{3} \dot{\epsilon})^{m-2} \end{cases} \quad (3.93)$$

où les dérivées du seuil K_s , de la consistance K et de la sensibilité à la vitesse m par rapport aux P , $\bar{\epsilon}$ et T sont obtenues analytiquement, à partir de leurs expressions.

Pour définir complètement la matrice de sensibilité on a besoin de déterminer les dérivées paramétriques $\frac{dV}{dP}$, $\frac{dX}{dP}$, $\frac{dp}{dP}$, $\frac{d\bar{\epsilon}}{dP}$, $\frac{dT}{dP}$ et $\frac{d\dot{T}}{dP}$, donc de résoudre un problème de sensibilité nodale.

3.2 CALCUL DE SENSIBILITÉ NODALE

3.2.1 Définition et résolution du système de sensibilité

Dans le chapitre 2 nous avons vu qu'un problème de sensibilité pouvait être formulé par la différentiation des équations caractéristiques du modèle. Si on dérive par rapport aux paramètres rhéologiques les équations fondamentales qui définissent la résolution éléments

finis du modèle direct (3.51), (3.63) et (3.73), on obtient le système de sensibilité sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial V} \frac{dV}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T} \frac{dT}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X} \frac{dX}{dP} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P} + \frac{\partial S}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}}{dP} + \frac{\partial S}{\partial V} \frac{dV}{dP} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{dT}{dP} + \frac{\partial S}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}}{dP} + \frac{\partial S}{\partial X} \frac{dX}{dP} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \frac{dV}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{dp}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \frac{dT}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial X} \frac{dX}{dP} = 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

où

$$\begin{cases} \frac{dV}{dP} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{dP} \right) \\ \frac{d\dot{T}}{dP} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dP} \right) \end{cases} \quad (3.95)$$

En accord avec les conditions limites imposées dans le modèle direct, pour les dérivées on a les conditions suivantes:

* en terme de variables géométriques: $\frac{dX}{dP}(t=0) = 0$ sur Ω_h .

* en terme de vitesses nodales: $\begin{cases} \frac{dV}{dP} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{hv} \\ \frac{dV}{dP} \hat{n} + (V - V^{out}) \cdot \frac{d\hat{n}}{dP} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{hc} \end{cases}$

* en terme de températures: $\frac{dT}{dP}(t=0) = 0$ sur Ω_h .

* en terme de pression: $\frac{dp}{dP} = \hat{n}^t \cdot \frac{ds}{dP} \hat{n} + \frac{d\hat{n}^t}{dP} \cdot s \cdot \hat{n} + \hat{n}^t \cdot s \cdot \frac{d\hat{n}}{dP} - \frac{d\hat{n}^t}{dP} \cdot T^d$ sur $\partial\Omega_{hT}$

La surface de contact avec l'outil conserve la direction de la normale parallèle à l'axe d'axisymétrie et on a $\frac{d\hat{n}}{dP} = 0$ sur $\partial\Omega_{hc}$. Pour les surfaces libres le calcul de $\frac{d\hat{n}}{dP}$ est fait à partir des dérivées $\frac{dX}{dP}$ correspondant aux noeuds qui définissent la surface discrétisée.

Il est important de souligner que le système de sensibilité (3.94) est toujours linéaire ce qui rend la résolution rapide. Pour avoir un calcul de sensibilité nodale cohérent avec la résolution du problème direct il faut utiliser la même méthode incrémentale (voir la figure 3.6).

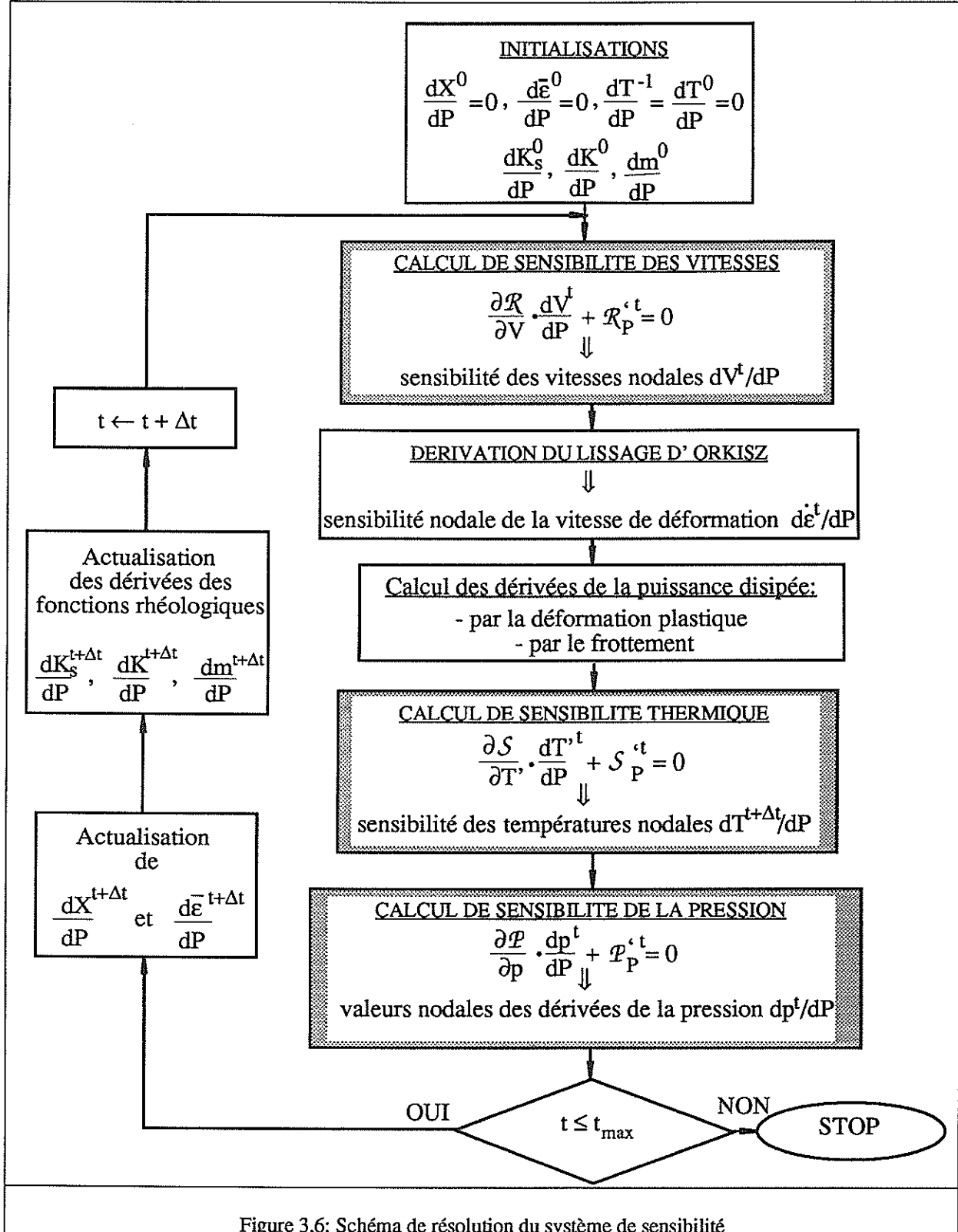


Figure 3.6: Schéma de résolution du système de sensibilité

Ainsi la dérivation du système incrémental (3.74) conduit à:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial V} \cdot \frac{dV^t}{dP} + \mathcal{R}'_P = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \cdot \frac{dT^t}{dP} + \mathcal{S}'_P = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{dp^t}{dP} + \mathcal{P}'_P = 0 \end{cases} \quad (3.96)$$

où \mathcal{R}'_P , \mathcal{S}'_P , \mathcal{P}'_P représentent les termes de sensibilité déterminés avec les dérivées par rapport aux variables d'état calculés aux incréments précédents ($t-\Delta t$ et $t-2\Delta t$ par exemple).

Ainsi pour les dérivées du résidu on a:

$$\mathcal{R}'_P = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T} \frac{dT^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}^t}{dP} \quad (3.97)$$

Pour le terme correspondant à l'équation de la chaleur, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_P = & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial V} \frac{dV^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \frac{dT^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}^t}{dP} + \\ & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}^{t-\Delta t}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial V} \frac{dV^{t-\Delta t}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \frac{dT^{t-\Delta t}}{dP} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}^{t-\Delta t}}{dP} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Si on dérive l'équation de pression on obtient:

$$\mathcal{P}'_P = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \frac{dV^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \frac{dT^t}{dP} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{T}} \frac{d\dot{T}^t}{dP} \quad (3.99)$$

Pour résoudre le système de sensibilités (3.96) il faut déterminer les matrices qui définissent chaque équation linéaire. Le hessien $H = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial V}$, la matrice de capacité $C' = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T}$ et la matrice de pression $A = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p}$ sont déjà calculés et triangularisés à la fin de chaque incrément. Le principal calcul supplémentaire est lié à la détermination analytique des termes de sensibilité \mathcal{R}'_P , \mathcal{S}'_P et \mathcal{P}'_P .

La réactualisation des dérivées de la géométrie et de la déformation équivalente est faite suivant le schéma d'Euler par:

$$\begin{cases} \frac{dX^{t+\Delta t}}{dP} = \frac{dX^t}{dP} + \Delta t \frac{dV^t}{dP} \\ \frac{d\bar{\epsilon}^{t+\Delta t}}{dP} = \frac{d\bar{\epsilon}^t}{dP} + \Delta t \frac{d\dot{\bar{\epsilon}}^t}{dP} \end{cases} \quad (3.100)$$

où partant des relations (3.71) et (3.76) on a:

$$\frac{d\dot{\bar{\epsilon}}^t}{dP} = \sqrt{\frac{4}{3} [\dot{\bar{\epsilon}}^{vp} : (\frac{\partial B_o}{\partial X} \frac{dX}{dP}) V + B_o \frac{dV^t}{dP} - \alpha \frac{d\Gamma^t}{dP} I]} \quad (3.101)$$

B_o étant l'opérateur qui définit le calcul d'Orkisz pour les vitesses de déformation aux noeuds. On remarque qu'on a besoin de calculer $\frac{\partial B_o}{\partial X}$ pour rendre précis le calcul de sensibilité de la vitesse de déformation et de la déformation équivalente.

3.2.2 Calcul des termes de sensibilités mécaniques

Les dérivées du résidu donné par l'équation (3.45) sont définies par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_n}{\partial q} = & \int_{\Omega_h} \frac{\partial s_h}{\partial q} : \frac{\partial \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp}}{\partial V_n} d\Omega + \left(\int_{\Omega_h} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_h} \frac{\partial \rho_{pe}}{\partial q} (tr(\dot{\bar{\epsilon}}_h) - 3\alpha \dot{T}_h) d\Omega \cdot \int_{\Omega_h} tr\left(\frac{\partial \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp}}{\partial V_n}\right) d\Omega - \\ & \int_{\Omega_{hc}} \frac{\partial \tau_h}{\partial q} N_n dS^t \text{ pour } q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_n}{\partial \dot{T}} = \int_{\Omega_h} \frac{\partial s_h}{\partial \dot{T}} : \frac{\partial \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp}}{\partial V_n} d\Omega - \left(\int_{\Omega_h} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_{er}} 3\rho_{pe} \alpha d\Omega \cdot \int_{\Omega_h} tr\left(\frac{\partial \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp}}{\partial V_n}\right) d\Omega \quad (3.103)$$

avec:

$$\begin{cases} \frac{\partial s_h}{\partial q} = \frac{\partial f_h}{\partial q} \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp} \text{ pour } q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\} \\ \frac{\partial s_h}{\partial \dot{T}} = -\alpha f_h I - \frac{2\alpha}{3 \dot{\bar{\epsilon}}_h} \frac{\partial f_h}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}_h} tr(\dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp}) \dot{\bar{\epsilon}}_h^{vp} \\ \frac{\partial \tau_h}{\partial q} = \frac{\partial g_h}{\partial q} \Delta v_{h_t} \text{ pour } q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\} \end{cases} \quad (3.104)$$

où les dérivées des f_h et g_h sont déterminées à partir de leurs relations de définition. Par exemple pour la loi de type Norton-Hoff, si on utilise la rhéologie discrète définie par (3.49), les dérivées des f_h sont obtenues analytiquement à partir des expressions qui définissent le seuil, la consistance ou la sensibilité à la vitesse en fonction des P , $\bar{\epsilon}$ et T . D'une manière similaire les dérivées de g_h sont obtenues à partir de la dérivée de la consistance K . Pour le coefficient de pénalisation on dérive la relation d'adimensionalisation définie par (3.42).

Si dans le cas de la torsion on peut négliger les termes qui contiennent la sensibilité géométrique, pour la traction ou la compression, l'influence du changement de la forme sur le calcul de sensibilité du champ de vitesse est assez importante. Dans ce cas les dérivées géométriques doivent tenir compte de l'influence des coordonnées nodales X sur le calcul du résidu. Pour faciliter l'écriture on exprime le résidu par la somme du terme volumique \mathcal{R}^v , du terme de pénalisation \mathcal{R}^p et du terme surfacique \mathcal{R}^s . Ainsi nous avons:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_h}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{R}_h^v}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{R}_h^p}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{R}_h^s}{\partial X} \quad (3.105)$$

avec:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_h^v}{\partial X} = \int_{\Omega_h} s_h : \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} d\Omega^e + \int_{\Omega_h} \frac{\partial s_h}{\partial X} : \frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} d\Omega^e + \int_{\Omega_h} s_h : \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega^e \quad (3.106)$$

où:

$$\begin{cases} \frac{\partial s_h}{\partial X} = f_h \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) + \frac{2}{3 \dot{\epsilon}_h} \frac{\partial f_h}{\partial \dot{\epsilon}_h} \left[\dot{\epsilon}_h^{vp} : \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) \right] \dot{\epsilon}_h^{vp} \\ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) = \frac{\partial B}{\partial X} \end{cases} \quad (3.107)$$

Le calcul détaillé des dérivées géométriques pour l'opérateur B est donné à l'Annexe 7.

La dérivée du terme de pénalisation s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_h^p}{\partial X} = & \int_{\Omega_h} d\Omega^e \cdot \left(\int_{\Omega_h} d\Omega^e \right)^{-2} \cdot \int_{\Omega_h} \rho_{pe} (tr(\dot{\epsilon}_h) - 3\alpha \dot{T}_h) d\Omega^e \cdot \int_{\Omega_h} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega^e + \\ & \left(\int_{\Omega_h} d\Omega^e \right)^{-1} \left[\int_{\Omega_h} \rho_{pe} (tr(\dot{\epsilon}_h) - 3\alpha \dot{T}_h) d\Omega^e + \int_{\Omega_h} \rho_{pe} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial X} \right) d\Omega^e \right] \cdot \int_{\Omega_h} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega^e + \\ & \left(\int_{\Omega_h} d\Omega^e \right)^{-1} \int_{\Omega_h} \rho_{pe} (tr(\dot{\epsilon}_h) - 3\alpha \dot{T}_h) d\Omega^e \cdot \left[\int_{\Omega_h} tr \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) d\Omega^e + \int_{\Omega_h} tr \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_h}{\partial V_n} \right) \right) d\Omega^e \right] \end{aligned} \quad (3.108)$$

Pour les termes de surface il faut introduire les dérivées du jacobien associé à la transformation géométrique surfacique et les dérivées du frottement par rapport aux coordonnées nodales. Ainsi on obtient:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_h^s}{\partial X} = - \int_{\Omega_{hT}} T^d N_n dS^t - \int_{\Omega_{hc}} \tau_h N_n dS^t - \int_{\Omega_{hc}} \frac{\partial \tau_h}{\partial X} N_n dS^t \quad (3.109)$$

où:

$$\frac{\partial \tau_h}{\partial X} = - g_h \frac{\partial \Delta v_{ht}}{\partial X} - \frac{g_h}{\partial |\Delta v_{ht}|} \frac{\partial |\Delta v_{ht}|}{\partial X} \quad (3.110)$$

Les dérivées géométriques de Δv_{ht} sont calculées à partir de (3.47) en tenant compte de la formulation discrète du vecteur vitesse (3.35) et du vecteur tangent u_h ($n_h \cdot u_h = 0$). Pour calculer $d\Omega'$ et dS' on dérive les expressions (3.36) par rapport aux coordonnées nodales. Un calcul détaillé de ces termes est présenté à l'Annexe 8.

Pour le terme libre correspondant à l'équation de sensibilité de pression, si on dérive (3.72) on obtient:

$$\mathcal{P}_P^t = \frac{\partial A}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} p^t - \frac{\partial B_p}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} - \frac{\partial B_p}{\partial s} \frac{ds^t}{dP} \quad (3.111)$$

Dans un premier temps on peut négliger les termes géométriques, car la pression n'intervient dans aucune relation récursive pouvant éventuellement cumuler des erreurs (comme, par exemple, le calcul de la déformation équivalente à partir du champ de vitesses nodales). Donc, si on tient compte de la forme linéaire de la matrice B_p par rapport au déviateur s on approxime:

$$\mathcal{P}_P^t = - B_p(X, \frac{ds^t}{dP}) \quad (3.112)$$

avec $\frac{ds^t}{dP}$ déterminé par (3.91).

3.2.3 Calcul des termes de sensibilités thermiques

Pour l'équation de la chaleur on va suivre le même schéma de différences finies défini au paragraphe 2.2.4. On définit alors les dérivées thermiques correspondantes par:

$$\begin{cases} \frac{dT'}{dP} = \alpha_1 \frac{dT^{t-\Delta t}}{dP} + \alpha_2 \frac{dT^t}{dP} + \alpha_3 \frac{dT^{t+\Delta t}}{dP} \\ \frac{dT'}{dP} = (1-\gamma) \frac{dT^t}{dP} + \gamma \frac{dT^{t+\Delta t}}{dP} \\ \frac{dT^t}{dP} = \frac{\frac{dT^t}{dP} - \frac{dT^{t-\Delta t}}{dP}}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.113)$$

Pour simplifier le calcul on détermine le terme de sensibilité thermique directement à partir de la relation (3.68) par:

$$S_P^t = \frac{dC^t}{dP} T^t + \frac{dF^t}{dP} \quad (3.114)$$

sachant que les dérivées totales par rapport aux P sont déterminées à partir des dérivées partielles par rapport à toutes les variables d'état nodales qui interviennent dans l'expression des matrices thermiques. Si on part du système (3.68) nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC^t}{dP} = \frac{dK^1}{dP} + \frac{dK^2}{dP} + \frac{\gamma(dC/dP)}{\alpha_3 \Delta t} \\ \frac{dF^t}{dP} = B_T \left(\frac{dF^1}{dP} \right) + \frac{dF^2}{dP} + \\ \quad \frac{C}{\Delta t} \left[(1-2\gamma) - \frac{\gamma\alpha_2}{\alpha_3} \right] \frac{dT^t}{dP} - \frac{C}{\Delta t} \left[(1-\gamma) + \frac{\gamma\alpha_1}{\alpha_3} \right] \frac{dT^{t-\Delta t}}{dP} + \\ \quad \frac{dC/dP}{\Delta t} \left[(1-2\gamma)T^t - (1-\gamma)T^{t-\Delta t} \right] - \frac{\gamma dC/dP}{\alpha_3 \Delta t} (\alpha_1 T^{t-\Delta t} + \alpha_2 T^t) \end{array} \right. \quad (3.115)$$

Pour la matrice de capacité on doit dériver les termes géométriques intervenant dans la description du jacobien et nous obtenons:

$$\frac{dC_{ij}}{dP} = \int_{\Omega_h} \rho c N_i N_j d\Omega^e \quad (3.116)$$

En ce qui concerne la matrice de conductivité on a d'une part l'influence des termes géométriques et d'autre part l'influence des dérivées de la température intervenant dans la définition du schéma de calcul du coefficient de rayonnement. Ainsi la dérivée de la première composante s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{ij}^1}{dP} = & \int_{\Omega_h} k \frac{\partial \text{grad} N_i}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} \text{grad} N_j d\Omega^e + \int_{\Omega_h} k \text{grad} N_i \frac{\partial \text{grad} N_j}{\partial X} \frac{dX^t}{dP} d\Omega^e + \\ & \int_{\Omega_h} k \text{grad} N_i \text{grad} N_j d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.117)$$

Pour le deuxième type de terme de conductivité nous avons:

$$\frac{dK_{ij}^2}{dP} = \int_{\Sigma_c} h_{cd} N_i N_j dS^e + \int_{\Sigma_f} h_{cv} N_i N_j dS^e + \int_{\Sigma_f} \frac{d\langle h_r \rangle^t}{dP} N_i N_j dS^e + \int_{\Sigma_f} \langle h_r \rangle^t N_i N_j dS^e \quad (3.118)$$

où:

$$\frac{d\langle h_r \rangle^t}{dP} = \frac{d\langle h_r \rangle^t}{dT^t} \frac{dT^t}{dP} + \frac{d\langle h_r \rangle^t}{dT^{t-\Delta t}} \frac{dT^{t-\Delta t}}{dP} \quad (3.119)$$

$\langle h_r \rangle^t$ étant défini par la relation (3.67).

Les sensibilités des termes libres sont déterminées par:

$$\frac{dF_j^1}{dP} = - \int_{\Omega_h} r \frac{d\dot{v}_h}{dP} N_j d\Omega^t + \int_{\Sigma_c} \frac{dq_{fh}}{dP} N_j dS - \int_{\Omega_h} \dot{w}_h N_j d\Omega^t + \int_{\Sigma_c} q_{fh} N_j dS^t \quad (3.120)$$

$$\frac{dF_j^2}{dP} = - \int_{\Sigma_c} h_{cd} T_\theta N_j dS^t - \int_{\Sigma_f} h_{cv} T_a N_j dS^t - \int_{\Sigma_f} \frac{d\langle h_r \rangle^t}{dP} T_a N_j dS^t - \int_{\Sigma_f} \langle h_r \rangle^t T_a N_j dS^t \quad (3.121)$$

où les composantes les plus importantes sont celles liées à la sensibilité de la puissance de déformation viscoplastique et du frottement.

Si on dérive la relation (3.61) on obtient:

$$\frac{d\dot{w}_h}{dP} = \frac{ds_h}{dP} \cdot \dot{\varepsilon}_h^{vp} + s_h \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}_h}{\partial V} \frac{dV}{dP} - 3\alpha \frac{dp_h}{dP} \dot{T}_h - 3\alpha p_h \frac{d\dot{T}_h}{dP} \quad (3.122)$$

avec:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dP} = \sum_{q \in \{P, \dot{\varepsilon}, T\}} \frac{\partial f_h}{\partial q} \frac{dq}{dP} \dot{\varepsilon}_h^{vp} + \frac{\partial s_h}{\partial \dot{T}} \frac{\partial \dot{T}}{\partial P} + \frac{\partial s_h}{\partial X} \frac{dX}{dP} + \frac{\partial s_h}{\partial V} \frac{dV}{dP} \\ \frac{\partial s_h}{\partial V} = f_h \frac{\partial \dot{\varepsilon}_h}{\partial V} \frac{dV}{dP} + \frac{2}{3 \dot{\varepsilon}_h} \frac{\partial f_h}{\partial \dot{\varepsilon}_h} \left(\dot{\varepsilon}_h^{vp} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}_h}{\partial V} \frac{dV}{dP} \right) \dot{\varepsilon}_h^{vp} \\ \frac{dp_h}{dP} = \alpha \frac{d\rho_p}{dP} \text{Div}(v_h) \dot{T}_h - 3\alpha p_p \frac{d\text{Div}(v_h)}{dP} \dot{T}_h \end{cases} \quad (3.123)$$

Le principe de calcul des termes intervenant dans ces expressions est similaire avec celui utilisé dans le calcul de sensibilité résiduelle (§3.2.2).

Pour la chaleur due au frottement (voir la relation (3.62)), la différentiation par rapport aux paramètres rhéologiques conduit à:

$$\frac{dq_{fh}}{dP} = \beta_f \frac{d\tau_h}{dP} \Delta v_{ht} + \beta_f \tau_h \frac{d\Delta v_{ht}}{dP} \quad (3.124)$$

où:

$$\frac{d\tau_h}{dP} = \sum_{q \in \{P, \dot{\varepsilon}, T\}} \frac{\partial \tau_h}{\partial q} \frac{dq}{dP} + \frac{\partial \tau_h}{\partial X} \frac{dX}{dP} + \frac{\partial \tau_h}{\partial \Delta V_{ht}} \frac{d\Delta V_{ht}}{dP} \quad (3.125)$$

avec $\frac{\partial \tau_h}{\partial q}$ ($q \in \{P, \bar{\epsilon}, T\}$), $\frac{\partial \tau_h}{\partial X}$ déjà déterminés dans le paragraphe 3.2.2, par les relations (3.104) et (3.110), et $\frac{\partial \tau_h}{\partial \Delta V_{h_t}}$ calculé à partir de (3.46) et (3.50). Le calcul de $\frac{d\Delta v_{h_t}}{dP}$ est fait par

la dérivation de la relation (3.47) et on obtient:

$$\frac{d\Delta v_{h_t}}{dP} = \left[\frac{dv_h}{dP} u_h + (v_h - v^{out}) \cdot \frac{du_h}{dP} \right] u_h + [(v_h - v^{out}) \cdot u_h] \frac{du_h}{dP} \quad (3.126)$$

où $\frac{dv_h}{dP}$ et $\frac{du_h}{dP}$ s'exprime en fonction des dérivées de la vitesse nodale $\frac{dV}{dP}$ et de la géométrie nodale $\frac{dX}{dP}$.

3.2.4 Transport des variables de sensibilités nodales

Pour rester cohérent avec le schéma de transport par moindres carrés (§2.2.7) on doit utiliser le même principe de transport pour des variables de sensibilité paramétrique $\frac{d\bar{\epsilon}}{dP}$ et $\frac{dT}{dP}$. En ce qui concerne les dérivées géométriques $\frac{dX}{dP}$, si on veut être rigoureux il faudrait dériver le schéma de génération de maillage, ce qui nous paraît tout à fait difficile. Naturellement, pour éviter ce problème, on se dirige vers l'exploitation des aspects purement géométriques. Ainsi, si on représente l'ancienne et la nouvelle grille des noeuds (figure 3.7), on constate que pour chaque noeud "n" du nouveau maillage on trouve un ancien élément ($a_1 a_2 a_3$) à laquelle il appartient.

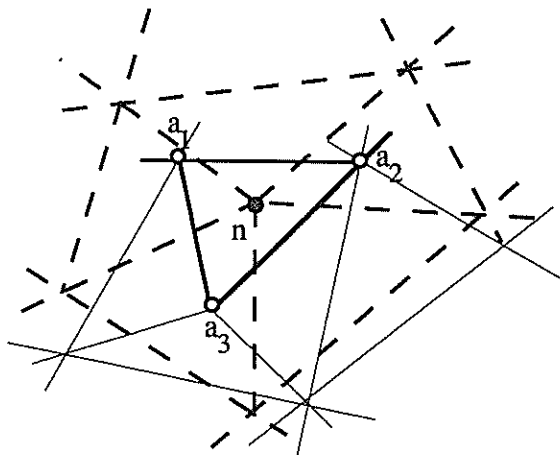


Figure 3.7: Définition du triangle de l'ancien maillage qui contient un noeud du nouveau maillage

Dans ce cas on peut écrire:

$$X_n^{nv} = \sum_{k=1}^{Anbnoe} X_k^{an} N_k(\xi') \quad (3.127)$$

où ξ' est la coordonnée généralisée du point choisi dans l'espace de référence. Elle est calculée par une technique d'inversion de la transformation géométrique qui fait passer l'élément de sa configuration de référence à sa configuration réelle.

La dérivation d'expression (3.127) par rapport aux paramètres rhéologiques P conduit à:

$$\frac{dX_n^{nv}}{dP} = \sum_{k=1}^{Anbnoe} \left[\frac{dX_k^{an}}{dP} N_k(\xi') + X_k^{an} \frac{dN_k(\xi')}{d\xi'} \frac{d\xi'}{dP} \right] \quad (3.128)$$

On voit bien qu'on a besoin de calculer le terme $\frac{d\xi'}{dP}$ qui, compte tenu de la définition de ξ' , nécessite la connaissance de $\frac{dX_n^{nv}}{dP}$. Ceci rend la relation (3.128) redondante et on ne peut pas arriver à déterminer la dérivée. Si on suppose la transformation par remaillage de telle façon qu'on a $\frac{d\xi'}{dP} = 0$, on obtient:

$$\frac{dX_n^{nv}}{dP} \equiv \sum_{k=1}^{Anbnoe} \frac{dX_k^{an}}{dP} N_k(\xi') \quad (3.129)$$

L'expérience numérique montre que la méthode de transport par interpolation conduit aux pertes des valeurs extrêmes, notamment dans les zones de forts gradients. Comme on a besoin d'un calcul précis de dérivées géométriques, on doit faire appel à des méthodes de transport plus performantes. Dans une première approche on utilise un transport de type moindres carrés. On calcule ainsi les sensibilités géométriques par la résolution du système linéaire global:

$$S_{nk} \frac{dX_n^{nv}}{dP} = U'_n \quad (3.130)$$

La matrice S est définie par (3.81) et le second membre par:

$$U'_n = \int_{\Omega_h} \frac{dX_h^{an}}{dP} N_n^{nv} \quad (3.131)$$

3.2.5 Synthèse concernant le calcul de sensibilité

Le calcul de sensibilité paramétrique développé aux paragraphes précédents montre qu'on est capable d'évaluer simultanément les dérivées des grandeurs observables par rapport à tous les paramètres à identifier, en utilisant un schéma de calcul analytique. Le principe est de déterminer les dérivées de toutes les variables intervenant dans le calcul des grandeurs globales, partant d'une différentiation analytique des équations discrètes d'équilibre et du schéma incrémental de résolution caractéristique du modèle direct de simulation. De ce point de vue le tableau 3.1 présente d'une façon synthétique la correspondance existant entre le calcul direct des variables et le calcul de sensibilité.

Tableau 3.1: Synthèse concernant le calcul des principales dérivées qui interviennent dans l'évaluation de la matrice de sensibilité

	Calcul direct	Calcul de sensibilité	Méthodologie
Grandeurs observables	M^c	$\frac{dM^c}{dP}$	Dérivation analytique de la relation (3.84)
Fonction constitutive	f	$\frac{\partial f}{\partial P}, \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}}, \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}}, \frac{\partial f}{\partial T}$	Dérivation analytique de la loi rhéologique
Variables nodales principales	V T p	$\frac{dV}{dP}$ $\frac{dT}{dP}$ $\frac{dp}{dP}$	Évaluation des termes de sensibilité: $\mathcal{R}_P^t, \mathcal{S}_P^t, \mathcal{P}_P^t$ et résolution du système de sensibilités (3.96)
Variable géométrique	X	$\frac{dX}{dP}$	Dérivation du schéma de réactualisation de la géométrie (3.76)
Variables de déformation	$\dot{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \bar{\varepsilon}$	$\frac{d\dot{\varepsilon}}{dP}, \frac{d\dot{\bar{\varepsilon}}}{dP}, \frac{d\bar{\varepsilon}}{dP}$	Dérivation des relations de définition: (3.38), (3.71), (3.76), (3.77)
Contraintes	s, σ	$\frac{ds}{dP}, \frac{d\sigma}{dP}$	Dérivation des relations de définition: (3.9) et (1.2)

On constate donc que le principal effort de calcul est dû à la résolution du système incrémental de sensibilité. Comme les matrices du système s'expriment directement en fonction

des matrices intervenant dans le modèle direct de calcul (le hessien, la matrice de capacité thermique, la matrice de pression), le coût additionnel de calcul est réduit à l'évaluation des termes de sensibilités paramétriques. De plus la linéarité des équations de sensibilités rend la résolution rapide et précise.

Il est également important de souligner la flexibilité du calcul de sensibilité par rapport à un changement de la forme analytique de la loi constitutive. Ceci se traduit par le fait que pour déterminer la matrice de sensibilité correspondant à d'autres formulations de la loi, il suffit d'introduire la nouvelle expression de la loi rhéologique et ses dérivées par rapport à toutes les variables définissant sa forme analytique.

Par exemple, si on reste dans le cadre de la formulation rhéologique qui utilise les expressions (3.13), on constate que le schéma de résolution incrémentale (figure 3.5) permet facilement d'ajouter une dépendance de la consistance et de la sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la vitesse de déformation. On peut ainsi écrire:

$$\begin{cases} K^{t+\Delta t} = K^{t+\Delta t}(P, \bar{\epsilon}^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}, \dot{\bar{\epsilon}}^t) \\ m^{t+\Delta t} = m^{t+\Delta t}(P, \bar{\epsilon}^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}, \dot{\bar{\epsilon}}^t) \end{cases} \quad (3.132)$$

Pour le calcul de sensibilité, cette nouvelle formulation signifie seulement l'addition des termes $\frac{d\bar{\epsilon}}{dP}$, $\frac{dK}{d\bar{\epsilon}}$ et $\frac{dm}{d\bar{\epsilon}}$ dans le calcul des dérivées paramétriques de la consistance et de la sensibilité à la vitesse de déformation.

4. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application de la méthodologie d'identification des paramètres rhéologiques partant d'une analyse inverse d'un modèle de simulation éléments finis du test rhéologique. La méthode proposée intègre à la fois un modèle direct de calcul (la simulation du test) et un modèle inverse d'identification basé sur un calcul analytique de la matrice de sensibilité.

On souligne principalement la précision de calcul des grandeurs observables, car la méthode de résolution des équations d'équilibre permet de prendre en compte la complexité d'écoulement du matériau, notamment lorsqu'il s'agit des phénomènes d'auto-échauffement et de localisation de la déformation. Il est ainsi possible d'identifier correctement des lois de comportement par la minimisation d'une fonction coût exprimant au sens de moindres carrées l'écart entre les grandeurs mesurées et celles calculées par éléments finis.

CHAPITRE 4

ANALYSES NUMÉRIQUES

1. INTRODUCTION

L'étude numérique d'un problème d'identification suppose généralement quatre étapes essentielles. Il faut tout d'abord vérifier que le calcul des dérivées est correct et par conséquent que la précision d'évaluation du gradient de la fonction objectif est satisfaisante. Il faut ensuite tester la convergence de l'algorithme vers le même jeu de paramètres en partant de différentes valeurs initiales. On vérifie ainsi s'il existe une accumulation d'erreurs pendant les boucles d'identification. Il est absolument nécessaire d'étudier la stabilité du logiciel et sa réaction à des données expérimentales faiblement perturbées ou bruitées. Il faut enfin valider le calcul d'identification par des comparaisons avec d'autres méthodes de dépouillement ou de calcul de paramètres, dans des situations qui permettent de rendre fiables les approches confrontées. L'importance de l'analyse inverse d'une simulation éléments finis peut aussi être renforcée par des analyses qui montrent les limites des méthodes traditionnelles.

On présentera dans ce chapitre une analyse numérique détaillée qui peut servir de stratégie de référence dans des études numériques concernant d'autres applications d'identification.

2. TEST DE TORSION (LOGICIEL TORRAO)

Les premières études ont été consacrées à l'identification d'une loi de comportement à partir d'essais expérimentaux de torsion. Le logiciel d'identification a donc été appelé TORRAO (TORSion et Rhéologie Assistée par Ordinateur).

La forme de la loi rhéologique est supposée connue. Nous avons choisi d'étudier une loi de type Norton-Hoff classique, pour laquelle la consistance s'écrit sous la forme:

$$K = K_0 (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (4.1)$$

Dans ce cas le vecteur paramétrique P est défini par l'ensemble des valeurs $\{K_0, n, \beta, m\}$.

Le terme $\bar{\varepsilon}_0$ permet d'éliminer les valeurs nulles de la consistance en début de déformation ($\bar{\varepsilon}_0 = 0.001$). Dans le tableau 4.1 nous indiquons les valeurs nominales des paramètres, ainsi que le domaine admissible de variation.

Tableau 4.1: Valeurs des paramètres rhéologiques

	$K_0 [MPa s^m]$	n	$\beta [K]$	m
valeurs nominales	2.	0.3	5000.	0.2
valeurs limites min max	0.05 5.	0.01 1.	3000. 7000.	0.01 1.

Ces valeurs choisies arbitrairement vont nous permettre de construire artificiellement un espace expérimental avec des simulations éléments finis du test de torsion, utilisant la loi donnée par la relation (4.1) et les conditions opératoires reportées sur le Tableau 4.2.

Tableau 4.2: Conditions opératoires définissant les tests de torsion

TORSION	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
vitesse de rotation $\dot{N} [tr/s]$	0.1	1.	10.	0.1	1.	10.	0.1	1.	10.
température initiale $T^0 [^\circ C]$	800	800	800	900	900	900	1000	1000	1000

La géométrie de l'éprouvette de torsion correspond aux dimensions normalisées (Figure 3.1): $D = 9 \text{ mm}$, $L = 51 \text{ mm}$, $d = 6 \text{ mm}$, $l = 8 \text{ mm}$, $r = 1.5 \text{ mm}$. Le maillage est non-structuré, de type triangles quadratiques à 6 noeuds (Figure 4.1) avec une taille d'élément de 1.5 mm (648 noeuds et 281 éléments).

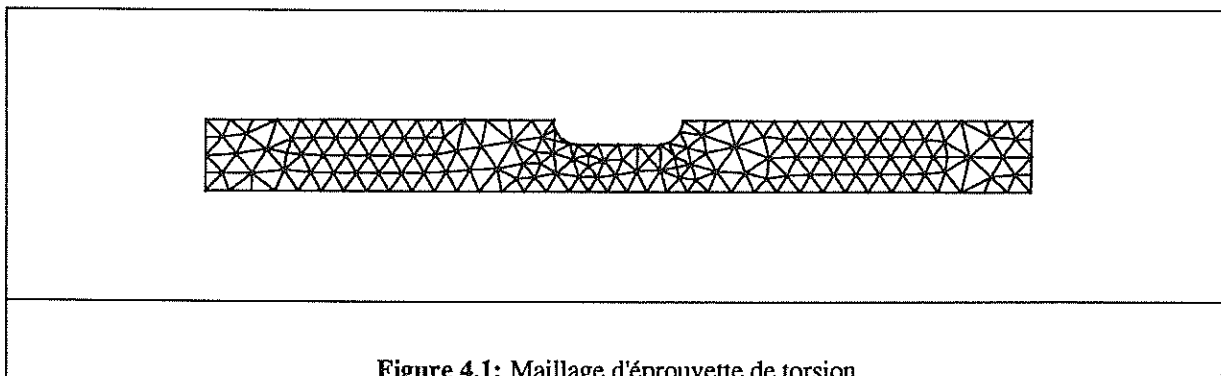


Figure 4.1: Maillage d'éprouvette de torsion

Les calculs de simulation correspondant à chaque type d'essai ($a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$) sont effectués pour un pas constant de nombre de tours: $\Delta N = 0.01$. Du point de vue thermique on suppose les tests anisothermes et adiabatiques (pas de flux de chaleur sortant) et on considère la conductivité $k = 30 [W/mK]$, la chaleur massique $c = 800 [J/KgK]$ et la densité $\rho = 7800 [Kg/m^3]$. Le phénomène de dilatation thermique est aussi pris en compte avec $\alpha = 10^{-5} [1/mm K]$.

On obtient un ensemble de courbes artificielles de couples $C^{ex} = C^{ex}(N, \dot{N}, T^0)$ que l'on considérera par la suite comme base expérimentale. Pour la définition du problème d'identification on choisit une expression de la fonction coût correspondant à la relation (2.16) et on cherche les paramètres rhéologiques $P = \{K_0, n, \beta, m\}$ pour lesquels nous avons:

$$Q(P) = \min Q \quad \text{où} \quad Q = \frac{\sum_{i=1}^s [C_i^c - C_i^{ex}]^2}{\sum_{i=1}^s [C_i^{ex}]^2} \quad \text{et} \quad P_{min} \leq P \leq P_{max} \quad (4.2)$$

Les valeurs extrêmes des paramètres, P_{min} et P_{max} , sont celles reportées dans le Tableau 4.1.

2.1 TEST NUMÉRIQUE POUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Comme l'algorithme d'identification est essentiellement lié au calcul des sensibilités paramétriques, une première validation concerne la précision d'évaluation des dérivées des couples par rapport aux paramètres à identifier $\frac{dC^c}{dP}$. La validation repose sur la comparaison avec des valeurs numériques obtenues par la méthode des différences finies.

Pour éliminer l'effet de différence d'ordre de grandeur de chaque paramètre, on adimensionalise leurs valeurs en les rapportant à la valeur initiale P^0 . Ainsi on définit les nouveaux paramètres par:

$$P' = \frac{P}{P^0} \text{ si } P^0 \neq 0 \text{ et } P' = 1 - P \text{ si } P^0 = 0 \quad (4.3)$$

En considérant une petite perturbation $\Delta P' = 10^{-5}$, on calcule les dérivées par rapport à P' avec le schéma de différences finies suivant:

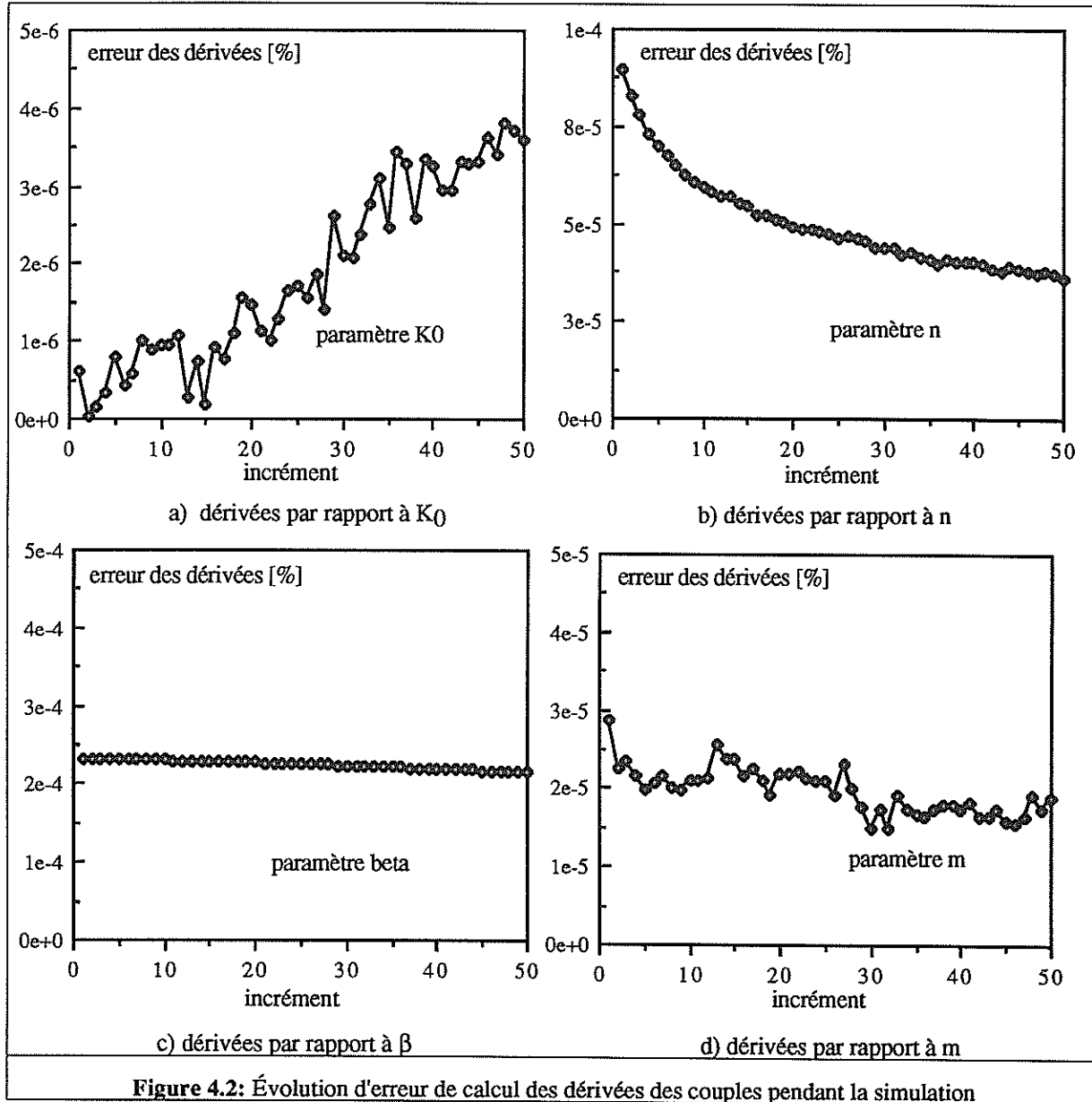
$$\frac{\Delta C^c}{\Delta P'} = \frac{C^c(P' + \Delta P') - C^c(P')}{\Delta P'} \quad (4.4)$$

L'erreur de calcul de dérivées est quantifiée approximativement par la relation:

$$e_d [\%] = \frac{\frac{dC^c}{dP'} - \frac{\Delta C^c}{\Delta P'}}{\frac{\Delta C^c}{\Delta P'}} \times 100 \quad (4.5)$$

où: $\frac{dC^c}{dP'} = \frac{dC^c}{dP} P^0$ si $P^0 \neq 0$ et $\frac{dC^c}{dP'} = -\frac{dC^c}{dP}$ si $P^0 = 0$.

La Figure 4.2 montre l'évolution de l'erreur d'évaluations des dérivées au cours des incréments, dans le cas de la courbe de simulation a_3 .

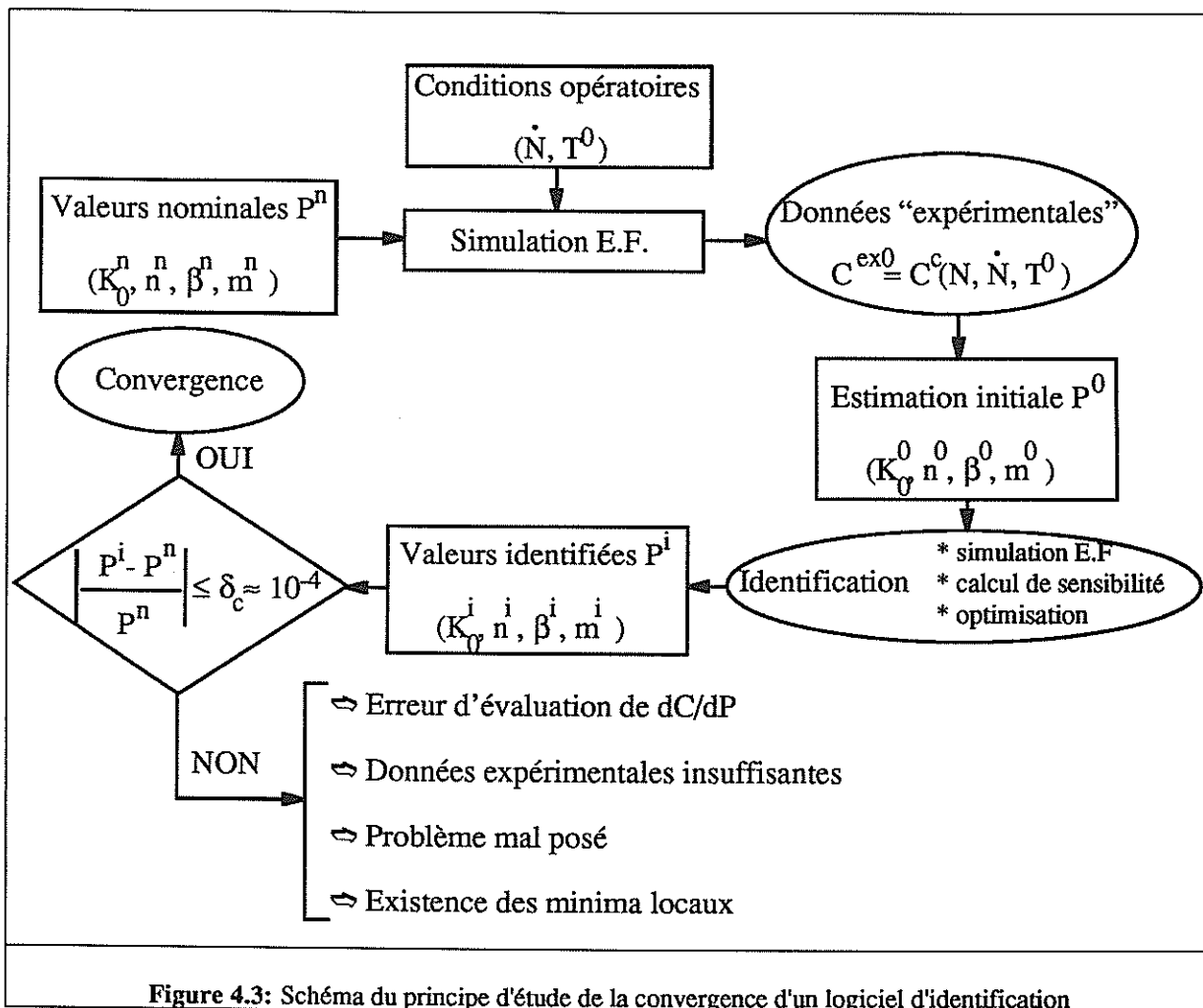


On constate que les erreurs de calcul des sensibilités paramétriques sont très faibles ($\leq 0.0005\%$) et que généralement elles n'augmentent pas pendant le calcul incrémental, à l'exception des dérivées par rapport à K_0 , pour lesquelles on observe une faible augmentation.

Compte tenu du fait que l'ordre de grandeur d'erreur de calcul est de 10^{-5} , on explique cette variation, ainsi que ces fluctuations, par l'influence de la précision numérique de calcul.

2.2 TEST DE CONVERGENCE

L'objectif de ce test est d'analyser la capacité du module d'identification à retrouver les valeurs nominales des paramètres (celles qui nous ont servi à créer l'espace expérimental), en partant de différentes valeurs initiales des paramètres P^0 (Figure 4.3).



Pour ce type d'étude on considère les courbes de couples non-bruités C^{ex0} , c'est-à-dire celles qui résultent directement de la simulation du test de torsion ($C^{ex0} = C^{ex}$). En tenant compte des principaux éléments qui définissent un problème d'identification: l'espace expérimental, le modèle de simulation et le module d'identification, on analyse la convergence par rapport aux facteurs d'influence suivants:

- * la configuration de l'espace expérimental (nombre de courbes et nombre de points par courbe),
- * le maillage initial de l'éprouvette,
- * l'estimation initiale de paramètres,
- * l'algorithme d'identification (influence de la régularisation).

2.2.1 Influence de l'espace expérimental

La formulation de la loi de comportement montre que, pour identifier les valeurs de paramètres, il faut un minimum de quatre courbes, correspondant à deux vitesses de rotation et à deux températures initiales différentes.

Concernant le nombre de points, il faut tenir compte du fait que chaque élément de la matrice de sensibilité doit être défini de façon indépendante (pour éviter la proportionnalité des lignes de la matrice).

Comme la taille de la matrice est égale au nombre de paramètres au carré (r^2), le nombre de points s doit alors satisfaire la condition $s \geq r^2$. Dans notre cas cela revient à choisir un minimum de quatre points par courbe. Ainsi un espace expérimental minimal est défini par $A = a_2a_3b_2b_3$ (4 courbes, voir le tableau 4.2). Pour mettre en évidence l'influence apportée par des valeurs expérimentales supplémentaires, on étudie d'autres espaces définis par: $B = a_1a_2a_3b_2b_3$ (5 courbes), $C = a_1a_2a_3b_1b_2b_3$ (6 courbes), $D = a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3$ (9 courbes). Partant de deux estimations initiales différentes (Tableau 4.3), on retrouve, dans tous les cas, les valeurs nominales des paramètres: $K_0 = 2. [MPa s^m]$, $n = 0.3$, $\beta = 5000 [K]$, $m = 0.2$ avec une très grande précision ($\approx 0.005\%$).

Tableau 4.3: Résultats et variables numériques concernant la convergence d'identification pour deux estimations initiales différentes et 4 espaces expérimentaux: A, B, C, D.

Nombre de points par courbe = 4	Estimation initiale 1 $K_0^0 = 1., n^0 = 0.1, \beta^0 = 6500, m^0 = 0.1$ $\epsilon_p^0 = 1.02$				Estimation initiale 2 $K_0^0 = 1., n^0 = 0.1, \beta^0 = 3000, m^0 = 0.1$ $\epsilon_p^0 = 1.06$			
	itér.	Conditionnement initial	Q^{init}	temps CPU[s]	itér.	Conditionnement initial	Q^{init}	temps CPU[s]
espace A	7	5×10^3	4.5	2543	40	4×10^5	0.77	11400
espace B	7	6×10^3	4.7	3179	19	4×10^5	0.77	10591
espace C	7	5×10^3	4.8	3814	14	4×10^5	0.77	10293
espace D	7	3×10^3	4.7	5722	9	2×10^5	0.76	5659

Avec la première estimation initiale on observe que pour les quatre types d'espace expérimentaux on obtient les valeurs nominales des paramètres après le même nombre

d'itérations (7 itérations). Le nombre de conditionnement de la matrice de sensibilité initiale reste presque inchangé et le temps de calcul est approximativement proportionnel au nombre de courbes rajoutées. Par contre dans le cas de la deuxième estimation initiale, qui se trouve dans l'espace de paramètres approximativement à même distance relative des valeurs nominales (ε_p^0) que la première, le nombre d'itérations dépend fortement du choix de la configuration de l'espace expérimental. Ainsi, si pour l'espace A, caractérisé par peu d'information expérimentale, la convergence est atteinte en 40 itérations, pour l'espace D, plus riche en données expérimentales, elle est réalisée en seulement 9 itérations.

On remarque de plus que les temps de calcul sont presque équivalents pour les espaces A, B et C et on observe une décroissance importante du temps de calcul (50%) pour D. Ceci permet de souligner un fait important qui est que l'ajout de résultats expérimentaux supplémentaires (donc des simulations supplémentaires) n'entraîne pas forcément une croissance du temps CPU, car l'identification peut alors s'effectuer en un plus petit nombre d'itérations, avec un effort de calcul sensiblement diminué. Il est aussi intéressant de noter qu'une estimation initiale plus proche de la solution, n'implique pas forcément un nombre d'itérations plus petit. C'est le cas de la deuxième estimation initiale pour laquelle la fonction coût de départ ($Q^0 \approx 77\%$) est plus petite que celle correspondant à la première estimation ($Q^0 \approx 450\%$). On explique ce comportement numérique par le fait que la fonction coût peut avoir un gradient plus faible dans certaines directions de l'espace des paramètres, ce qui peut diminuer le niveau de correction des paramètres pendant la minimisation.

2.2.2 Influence du maillage

Dans une simulation par éléments finis, la discrétisation géométrique de l'éprouvette, donc le maillage, est un facteur essentiel qui contrôle l'erreur de calcul. C'est la raison pour laquelle on a étudié la convergence du calcul d'identification pour trois types de maillage: le premier (taille de l'élément ≈ 1.5 mm) est celui à partir duquel on a construit notre base expérimentale, le second est un maillage grossier (taille de l'élément ≈ 2.5 mm) et l'autre plus fin (taille de l'élément ≈ 0.5 mm). Ainsi, dans le cas de la première estimation initiale, on arrive à identifier les valeurs nominales des paramètres (voir Tableau 4.4), avec 0.4% - 4% d'erreur pour le maillage grossier et avec 0.1% - 1% d'erreur pour celui plus fin.

Tableau 4.4: Influence du maillage sur les valeurs identifiées

Type de maillage	Nombre des Noeuds	Nombre d'Eléments	itér.	K_0	m	n	β	Q
gros (taille ≈ 2.5)	307	126	6	1.9126	0.2	0.2988	4999.99	7×10^{-5}
nominal (taille ≈ 1.5)	648	281	7	2.	0.2	0.3	5000.	2×10^{-9}
fin (taille ≈ 0.5)	1757	758	7	2.0234	0.2	0.3004	5000.	2×10^{-5}

On peut donc conclure ici qu'à partir d'une certaine taille d'élément (généralement définie pour que le calcul de simulation soit assez précis), le raffinement du maillage influence peu les résultats d'identification.

2.2.3 Influence de l'estimation initiale

En conformité avec la théorie des problèmes inverses, on dit que le problème d'identification est bien posé, si pour n'importe quelles valeurs initiales de paramètres (appartenant au domaine admissible) on obtient la même solution. Certaines catégories de problèmes inverses (modèles linéaires ou convexes) disposent de conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution. Dans le cas d'un modèle non-linéaire général, ces conditions sont très difficiles à établir et en conséquence nous sommes obligés d'effectuer des tests empiriques permettant de mettre en évidence la possibilité d'existence de minima locaux ou de problèmes de convergence. On choisit donc d'étudier la convergence de l'algorithme en partant de différentes valeurs initiales de paramètres, définissant un domaine le plus large que possible.

On sélectionne, dans un premier temps, des valeurs de départ correspondant aux noeuds de l'hypervolume défini par l'intersection de tous les hyperplans $P_i = P_{i\min}$ et $P_i = P_{i\max}$, où $i = 1, \dots, r$ (donc 2^r points).

Ayant 4 paramètres à identifier, on obtient donc 16 jeux de valeurs initiales, pour lesquelles les résultats d'identification sont reportés dans le Tableau 4.5.

Tableau 4.5: Conditions numériques de convergence pour des estimations initiales choisies parmi les points extrêmes de l'espace paramétrique (valeurs nominales identifiées avec une précision de $\approx 0.005\%$).

Estimation initiale des paramètres					Espace exp. A (4 points/courbe)		Espace exp. D (4 points/courbe)	
K_0^0	m^0	n^0	β^0	ε_p^0	Itérat.	Q^0	Itérat.	Q^0
5.	1.	1.	7000.	4.884	20	0.55	15	0.60
5.	1.	1.	3000.	4.884	20	0.98	15	0.98
5.	1.	0.01	7000.	4.398	8	94.40	9	61.13
5.	1.	0.01	3000.	4.398	9	2.60	7	2.64
5.	0.01	1.	7000.	2.959	8	0.60	6	0.60
5.	0.01	1.	3000.	2.959	12	0.99	11	0.99
5.	0.01	0.01	7000.	2.061	15	69.12	8	77.35
5.	0.01	0.01	3000.	2.061	11	0.94	9	1.35
0.05	0.01	0.01	7000.	1.716	19	0.36	14	0.39
0.05	0.01	0.01	3000.	1.716	21	0.98	16	0.98
0.05	0.01	1.	7000.	2.731	10	0.99	8	0.99
0.05	0.01	1.	3000.	2.731	12	1.	11	1.
0.05	1.	0.01	7000.	4.248	11	0.62	10	0.65
0.05	1.	0.01	3000.	4.248	9	0.97	7	0.97
0.05	1.	1.	7000.	4.749	22	1.	17	0.99
0.05	1.	1.	3000.	4.749	20	1.	15	1.

Les résultats numériques montrent qu'on obtient toujours la convergence, et confirme encore une fois que pour un espace expérimental de type D la convergence est toujours plus rapide que dans le cas où on utilise un espace de type A.

Un deuxième essai numérique de convergence consiste à choisir des estimations initiales de paramètres à l'intérieur de l'hypervolume définissant le domaine admissible ($P_{imin} \leq P_i \leq P_{imax}$). On part d'un point de référence situé à l'intérieur de l'espace paramétrique (par exemple celui défini par: $K_0^0 = 1.$, $n^0 = 0.1$, $\beta^0 = 6500$, $m^0 = 0.1$) et on fait varier successivement chaque paramètre, entre sa valeur minimale et sa valeur maximale (par exemple $0.05 \leq K_0^0 \leq 5$). On tente ainsi d'étudier l'influence de la valeur initiale de chaque paramètre sur l'histoire numérique de la convergence, exprimée par la variation de la fonction coût Q pendant la minimisation.

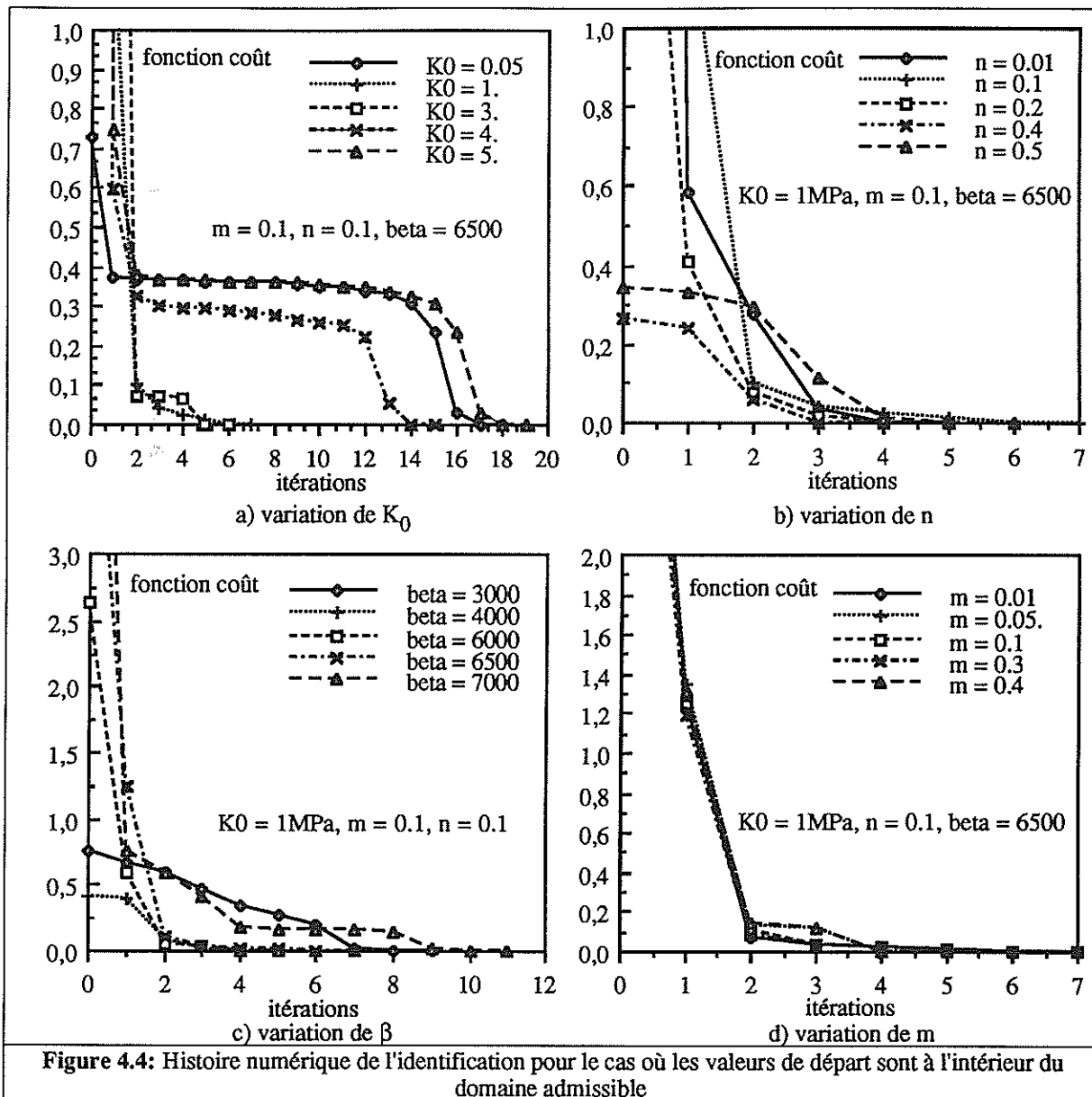


Figure 4.4: Histoire numérique de l'identification pour le cas où les valeurs de départ sont à l'intérieur du domaine admissible

Les graphiques présentés sur la Figure 4.4 mettent en évidence le fait qu'on obtienne le minimum global en un nombre convenable d'itérations, variant entre 7 (pour les coefficients n et m , Figure 4.4 c et d) et 20 (pour K_0 et β , Figure 4.4 a et b). Pour l'identification un espace expérimental de type D a été utilisé. Des variations très lentes sont obtenues pour des valeurs initiales de la consistance qui se trouvent au voisinage des valeurs limites (Figure 4.4 a), car il est possible que dans ce cas la projection des valeurs de paramètres sur le domaine admissible oblige à chercher les nouveaux paramètres autour de leurs valeurs antérieures ou extrêmes. Pour éviter ce genre de problème, une solution pratique consiste en une extension du domaine de recherche de paramètres, notamment en ce qui concerne les coefficients qui ont l'influence la plus importante sur l'ordre de grandeur des variables calculées (dans notre cas la consistance et le coefficient de sensibilité à la température).

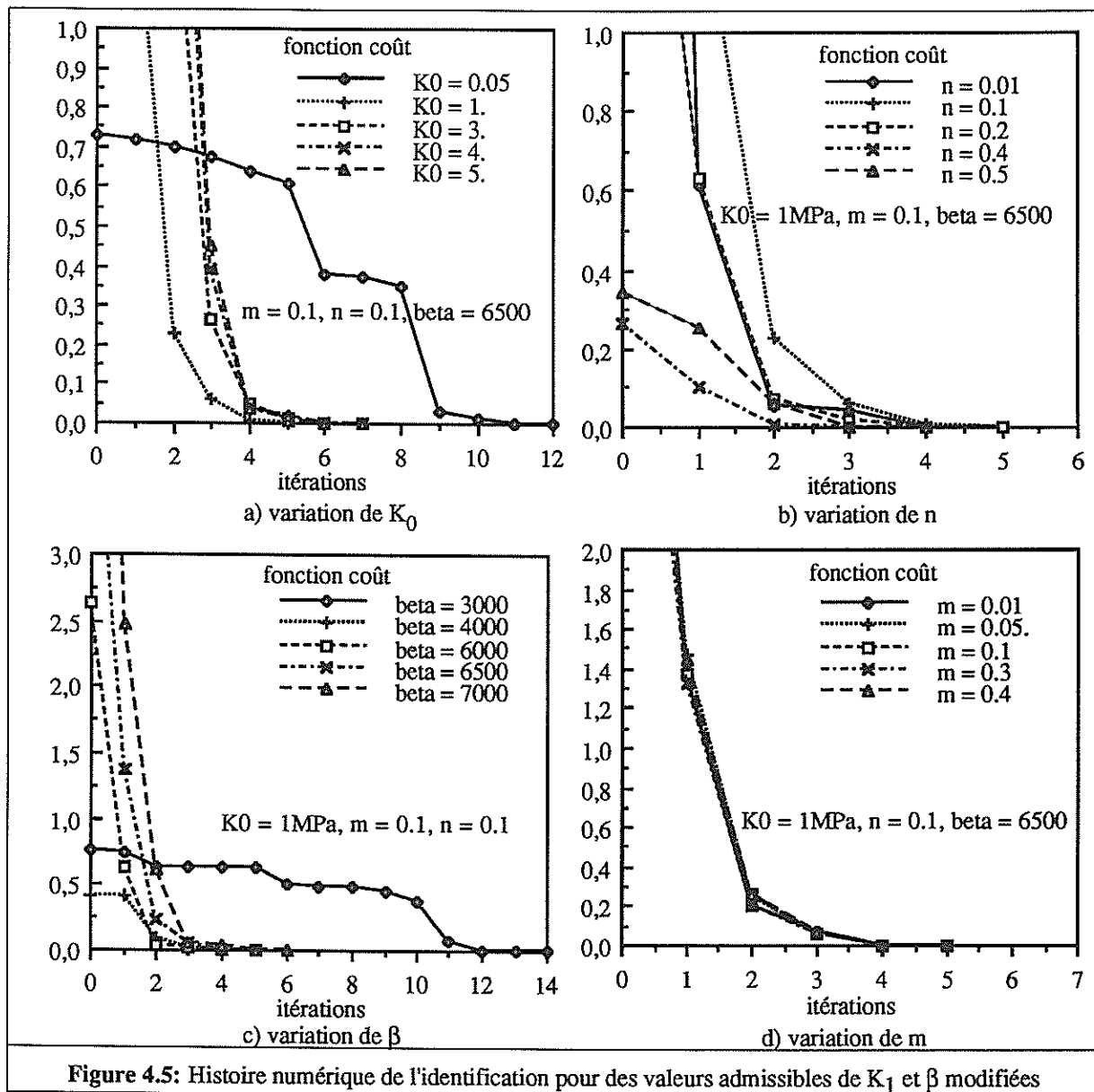


Figure 4.5: Histoire numérique de l'identification pour des valeurs admissibles de K_1 et β modifiées

Si par exemple on modifie les valeurs limites de K_0 et β tel que $K_{1\min} = 0.001 \text{ MPas}^m$, $K_{1\max} = 10 \text{ MPas}^m$, $\beta_{\min} = 100 \text{ [K]}$, et $\beta_{\max} = 10000 \text{ [K]}$, on obtient une convergence plus rapide (Figure 4.5). On remarque que pour la majorité des points de départ on obtient les valeurs nominales des paramètres après 5 ou 7 itérations, à l'exception de deux cas, pour lesquels la convergence est réalisée respectivement en 12 et 14 itérations. Par rapport aux cas testés antérieurement (Figure 4.4), le temps de calcul est diminué de 30% à 50%.

2.2.4 Influence de la régularisation

Cette étude concerne l'analyse du module d'identification dans le cas où l'on ajoute à la fonction coût Q un terme de régularisation Q_r , c'est-à-dire qu'on définit un Q^* sous la forme $Q^* = (1-\lambda)Q + \lambda Q_r$, où λ représente le coefficient de régularisation. On choisit une estimation initiale du jeu de paramètres correspondant à une valeur élevée de l'écart initial, par exemple $K_0^0 = 5.$, $n^0 = 0.01$, $\beta^0 = 7000$, $m^0 = 0.01$ pour lequel $Q^0 \approx 70$ (7000%).

Le tableau 4.6 contient les résultats d'identification obtenus avec une régularisation de type Tikhonov pour trois valeurs très différentes du paramètre de régularisation λ .

Tableau 4.6: Influence d'une régularisation de type Tikhonov

	TIKHONOV: $Q_r = \sum_j [P_j / P_j^0 - 1]^2$				
	valeurs nominales	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^{-7}$	$\lambda = 10^{-3}$	$\lambda = 10^{-1}$
fonction coût Q	0 %	0.3×10^{-5} %	0.06 %	16 %	23.9 %
itérations	-	15	21	23	43
$K_0 [\text{MPas}^m]$	2.	2.0000	1.9985	0.5630	0.6936
n	0.3	0.3000	0.2988	0.0362	0.0101
$\beta [\text{K}]$	5000.	5000.00	4999.47	4770.90	4538.34
m	0.2	0.2000	0.1999	0.1284	0.0102

Si pour une régularisation très faible, voire nulle, les valeurs nominales sont identifiées après 15-20 itérations, il n'en est pas de même pour une valeur élevée de λ pour laquelle l'algorithme stagne autour des valeurs très différentes, la régularisation imposant une recherche de paramètres dans une zone très limitée. Pour obtenir une convergence satisfaisante vers les valeurs nominales, on s'aperçoit qu'une bonne maîtrise du coefficient de régularisation est nécessaire, ce qui rend cette méthode très difficile à utiliser.

Un deuxième essai numérique d'identification a été réalisé pour un terme de régularisation de type Levenberg (Tableau 4.7). Dans ce cas on constate que l'algorithme converge en 16 itérations pour $\lambda = 10^{-7}$ et en 62 itérations pour $\lambda = 10^{-3}$. Enfin pour un coefficient de régularisation plus grand, $\lambda = 10^{-1}$, l'algorithme stagne après 1200 itérations,

les paramètres identifiés restant dans le voisinage de leur valeurs nominales. De ce point de vue le choix de λ est moins sensible que dans la méthode de Tikhonov.

Tableau 4.7: Influence d'une régularisation de type Levenberg

	LEVENBERG : $Q_r = \sum_j [P_j / P_j^k - 1]^2$ (k - itération de calcul GAUSS-NEWTON)			
	valeurs nominales	$\lambda = 10^{-7}$	$\lambda = 10^{-3}$	$\lambda = 10^{-1}$
fonction coût Q	0 %	0.5×10^{-3} %	0.2×10^{-2} %	0.6×10^{-1} %
itérations	-	16	62	1200
$K_0 [MPa s^m]$	2.	2.0000	2.0005	1.9643
n	0.3	0.3000	0.3000	0.2999
$\beta [K]$	5000.	5000.01	4999.99	5015.46
m	0.2	0.2000	0.1999	0.2000

Pour diminuer l'importance du terme de régularisation pendant la minimisation, notamment lorsqu'on s'approche de la solution, on préfère utiliser une méthode de type Levenberg-Marquardt, dans laquelle le paramètre régularisant est calculé avec la formule (2.43) proposée dans le paragraphe 5.3.4, chapitre 2. Les tests numériques (Tableau 4.8) montrent qu'on a réussi à obtenir la convergence en un nombre raisonnable d'itérations, pour des valeurs assez différentes de la régularisation initiale.

Tableau 4.8: Influence d'une régularisation de type Levenberg-Marquardt

	LEVENBERG - MARQUARDT modifié: $Q_r = \sum_j [P_j / P_j^k - 1]^2$, $\lambda = \min(\lambda^0, \prod_{k=1} \lambda^k), \lambda^k = \frac{\delta^k}{1 + \delta^k}, \delta^k = \frac{\text{grad} Q^k A^k [\text{grad} Q^k]^T}{\sqrt{Q^k}}$ $A^k = \text{diag}(S^k \beta S^{kT})$ (k - itération de calcul GAUSS-NEWTON)			
	valeurs nominales	$\lambda^0 = 10^{-7}$	$\lambda^0 = 10^{-3}$	$\lambda^0 = 10^{-1}$
fonction coût Q	0 %	0.3×10^{-5} %	0.3×10^{-5} %	0.2×10^{-3} %
itérations	-	15	11	60
$K_0 [MPa s^m]$	2.	2.0000	2.0000	2.0000
n	0.3	0.3000	0.3000	0.3000
$\beta [K]$	5000.	5000.00	5000.00	5000.00
m	0.2	0.2000	0.2000	0.2000

Évidemment pour λ^0 de l'ordre de 10^{-1} , la convergence se fait en un nombre plus élevé d'itérations (ici 60). Mais, par rapport à la méthode de type Levenverg, on a toujours une diminution considérable du nombre d'itérations (division par un facteur de ≈ 5 pour $\lambda^0 = 10^{-3}$ et un facteur de ≈ 20 pour $\lambda^0 = 10^{-1}$). Il est donc naturel de conseiller l'utilisation de cette dernière méthode pour l'identification de cas difficiles, qui présentent un problème de convergence ou pour lesquels il s'avère nécessaire de stabiliser l'algorithme d'identification, c'est à dire de réduire les oscillations numériques.

2.3 TEST DE STABILITÉ

On dit qu'un algorithme d'identification paramétrique est stable si pour de petites variations des données expérimentales ($\Delta C^{ex} \leq \varepsilon$), les valeurs des paramètres identifiés se trouvent toujours dans le voisinage de leurs valeurs moyennes obtenues pour $\Delta C^{ex} = 0$. Pour tester la stabilité il faut donc construire un espace expérimental faiblement perturbé. Partant des valeurs de couples obtenues par la simulation numérique, on définit la perturbation par:

$$\hat{C}_j^{ex} = C_j^{ex} + \Delta C_j^{ex} \text{ pour } j = 1, \dots, s \quad (4.6)$$

où ΔC^{ex} représente le niveau de perturbation, soit défini par une constante ($\Delta C^{ex} = \varepsilon$), soit généré aléatoirement avec une fonction de type "random" ($\Delta C^{ex} = \varepsilon \text{RAN}(x) C^{ex}$). Le niveau d'erreur ε quantifie l'ordre de grandeur de la perturbation désirée.

2.3.1 Influence des erreurs de perturbation

Le Tableau 4.9 regroupe les valeurs des paramètres obtenues pour quatre valeurs différentes d'erreur moyenne et deux types distincts: l'une constante et l'autre aléatoire uniforme.

Tableau 4.9: Influence d'une perturbation constante ou aléatoire uniforme (perturbation des valeurs comprises entre 0 et ε). Les valeurs initiales des paramètres sont: $K_0^0 = 1.$, $m^0 = 0.1$, $n^0 = 0.1$, $\beta^0 = 6500$)

	Erreur constante				Erreur aléatoire uniforme			
	$\varepsilon = 0.01\%$	$\varepsilon = 0.1\%$	$\varepsilon = 1\%$	$\varepsilon = 10\%$	$\varepsilon = 0.01\%$	$\varepsilon = 0.1\%$	$\varepsilon = 1\%$	$\varepsilon = 10\%$
K_0	2.	2.	2.00001	2.	1.9999	1.9995	1.9951	1.9556
m	0.2	0.2	0.2	0.1999	0.2	0.2	0.2	0.1999
n	0.3	0.3	0.3	0.2999	0.2999	0.2998	0.2983	0.2840
β	5000.	5000.	4999.99	4999.99	5000.	5000.	5000.	5000.05
Q	2×10^{-9}	2×10^{-8}	2×10^{-7}	2×10^{-6}	2×10^{-5}	2×10^{-4}	2×10^{-3}	2×10^{-2}

Les erreurs induites sur les coefficients identifiés sont très faibles, même pour une perturbation assez grande (10%) pour laquelle l'erreur d'identification est au maximum de 5%.

Comme dans la plupart des cas expérimentaux réels la distribution des erreurs de mesure est de type Gaussien, il est important d'étudier l'influence d'un tel type de dispersion. Dans ce cas on utilise l'expression (4.6), en définissant ΔC à l'aide d'une fonction aléatoire normale capable de "simuler" la présence d'un bruit de mesure. Les résultats d'identification (Tableau 4.10) montrent que les valeurs moyennes des coefficients rhéologiques avoisinent leurs valeurs de référence.

Tableau 4.10: Influence d'une perturbation aléatoire de type Gaussien (perturbation des mesures entre -2ε et 2ε)

Erreur Gaussien	K_0	σ_{K_0}	m	σ_m	n	σ_n	β	σ_β	Q
$\varepsilon = 0.01\%$	2.0007	8.1×10^{-4}	0.1999	1.2×10^{-5}	0.2999	5.0×10^{-5}	4999.48	0.37	8×10^{-5}
$\varepsilon = 0.1\%$	2.0072	8.1×10^{-3}	0.1997	1.2×10^{-4}	0.2999	5.4×10^{-4}	4994.79	3.73	8×10^{-4}
$\varepsilon = 1\%$	2.0725	8.4×10^{-2}	0.1971	1.2×10^{-3}	0.2985	5.4×10^{-3}	4948.07	37.02	8×10^{-3}
$\varepsilon = 5\%$	2.3770	4.7×10^{-1}	0.1855	5.8×10^{-3}	0.2923	2.6×10^{-2}	4744.39	181.22	4×10^{-2}
$\varepsilon = 10\%$	2.7890	10.8×10^{-1}	0.1715	1.1×10^{-2}	0.2840	5.1×10^{-2}	4498.92	353.17	9×10^{-2}

De plus, avec le module d'estimation de l'intervalle de confiance (§5.4, chapitre 2) on peut estimer la valeur de dispersion de chaque paramètre et on peut mettre en évidence la corrélation existant entre les erreurs de mesure et la précision d'estimation paramétrique. On observe ainsi que la distribution gaussienne donne des erreurs plus importantes sur les valeurs identifiées, car plus on augmente les erreurs de mesure (voir le cas de 5% et 10%), plus les déviations des paramètres deviennent grandes.

Ceci nous a amené à étudier l'influence du nombre de points par courbe sur l'écart entre les valeurs identifiées et nominales, et sur les valeurs de déviation paramétrique.

2.3.2 Influence du nombre de points expérimentaux

Dans tous les tests de stabilité précédents nous avons utilisé seulement les 4 premiers points de la courbe. Il est important de souligner que les dispersions aléatoires doivent être étudiées sur un nombre plus important de points expérimentaux, car disposer de plus d'informations supplémentaires, permet de mieux séparer l'effet déterministe de l'effet aléatoire.

On justifie cette conclusion en utilisant un espace expérimental dont le nombre de points par courbe varie progressivement de 10 à 100 (avec un pas de variation de 10). Le niveau d'erreur choisi est de $\epsilon = 5\%$.

On a représenté tout d'abord la variation d'erreur d'identification, calculée comme la différence relative entre les valeurs moyennes obtenues et les valeurs nominales (Figure 4.6).

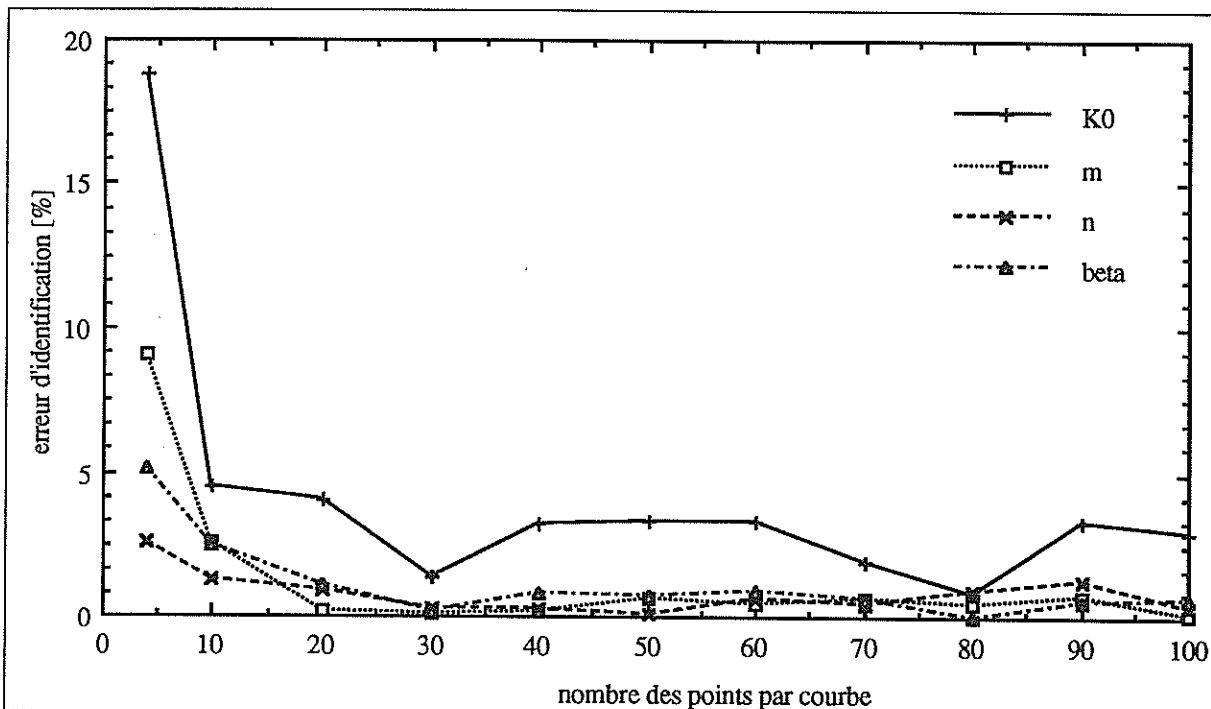
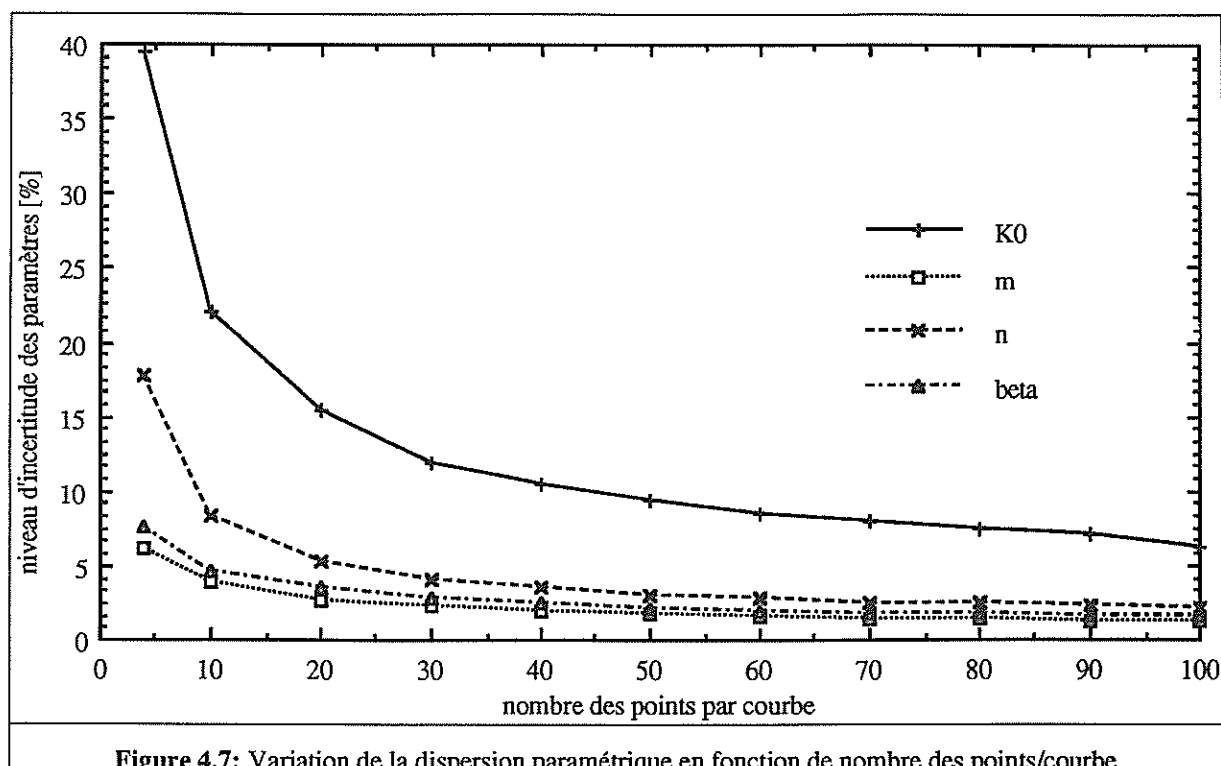


Figure 4.6: Variation d'erreur de prédiction des valeurs moyennes en fonction de nombre des points/courbe.

Les erreurs obtenues sont de l'ordre de 3% pour K_0 , 0.6% pour m , 1% pour n et 1% pour β . Elles sont liées à la distorsion aléatoire des courbes. On observe donc que du point de vue de la précision des valeurs moyennes, prendre 10 points par courbe semble raisonnable pour un niveau de perturbation des données expérimentales de l'ordre de 5%.

En ce qui concerne l'intervalle de confiance de chaque paramètre, la variation des dispersions (Figure 4.7) montre qu'il nous faut un minimum de 50 points/courbe.

On est capable dans ce cas de prédire les coefficients rhéologiques de la loi classique avec une dispersion variant entre 2%-3% (pour n , m , et β) et 10% pour K_0 . L'erreur sur la consistance s'explique par le fait qu'il y a une importante corrélation avec le paramètre de sensibilité thermique ($\rho_{k\beta} \approx 0.8$), et avec le coefficient d'écrouissage ($\rho_{kn} \approx 0.5$) (le calcul des coefficients de corrélation s'effectue en utilisant la relation (2.57)). Pour diminuer ce niveau d'incertitude il faut évidemment disposer de valeurs expérimentales plus fiables, connues avec une meilleure précision (de l'ordre de 1% par exemple).



2.4 VALIDATION

Une première question concernant une étude d'identification repose sur la pertinence des valeurs des paramètres. Il est donc naturel de chercher à établir un critère de validité en utilisant la confrontation avec une méthode analytique d'analyse du test rhéologique. Rappelons que les hypothèses classiques du dépouillement du test de torsion sont généralement valables pour des éprouvettes sans entaille et pour des conditions isothermes de déformation.

Nous avons choisi d'analyser par une méthode analytique les courbes de torsion générées artificiellement par des simulations éléments finis. L'approche éléments finis sera alors valide si les paramètres identifiés par l'analyse inverse sont très proches de ceux obtenus par la méthode analytique.

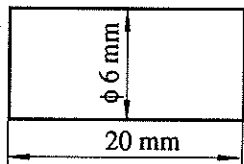
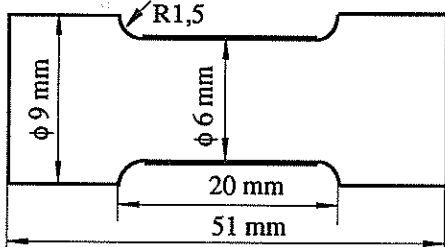
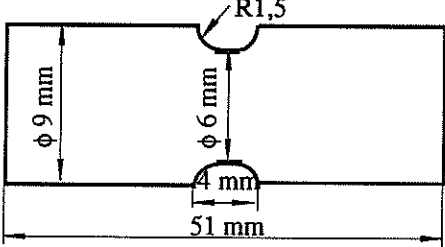
Afin de démontrer de façon plus systématique les limites d'un calcul traditionnel, on effectuera des comparaisons dans des conditions plus réalistes de déformation (géométrie avec entaille, conditions anisothermes).

Le Tableau 4.11 synthétise ainsi les conditions de simulation des tests de torsion, partant de trois géométries d'éprouvettes différentes. Le comportement du matériau est supposé de type Norton-Hoff, caractérisé par les paramètres rhéologiques du tableau 4.1. La discrétisation éléments finis est définie par des maillages fins (taille d'élément ≈ 0.5 mm) construit avec des triangles quadratiques. Pour simuler la présence d'erreurs de mesure, on

introduit une perturbation de type Gaussien avec un facteur d'incertitude approximativement de 5%. On obtient finalement les courbes couples-nombre de tours (C^{ex}) considérées comme résultats expérimentaux issus d'un test de torsion réel.

On cherche à identifier les coefficients rhéologiques en utilisant deux méthodes: l'une utilise l'approche éléments finis (TORRAO), et l'autre une méthode de régression non-linéaire à partir d'un modèle analytique. Cette dernière est considérée comme représentative des méthodes classiques. Elle repose sur une analyse simplifiée de la cinématique du test de torsion (voir Tableau 1.2), seulement dans la partie utile de l'éprouvette.

Tableau 4.11: Géométrie d'éprouvettes et conditions de simulation des tests de torsion.

TORSION		Conditions	
Géométrie d'éprouvette	Isotherme	Anisotherme (adiabatique)	
		A1	A2
<p>GI</p> 		$\dot{N}_1 = 0.1 \text{ tr/s}$ $\dot{N}_2 = 1. \text{ tr/s}$ $\dot{N}_3 = 10. \text{ tr/s}$	
<p>GII</p> 		$T_1^0 = 800^\circ\text{C}$ $T_2^0 = 1000^\circ\text{C}$	$T_1^0 = 500^\circ\text{C}$ $T_2^0 = 600^\circ\text{C}$
<p>GIII</p> 		<p><u>acquisition:</u></p> $\Delta N = 0.02 \text{ tours}, N_{max} = 1. \text{ tour}$ <p><u>coefficients thermiques:</u></p> $\rho = 7500 [\text{Kg/m}^3], k = 30 [\text{W/mK}]$ $c = 800 [\text{J/KgK}]$	

Les valeurs des couples sont obtenues par l'intégration de la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta z}$ et s'expriment directement en fonction de la géométrie, de la vitesse de rotation, du nombre de tours et de la température sous la forme:

$$C^{an} = 2\pi K_0 \exp\left(\frac{\beta}{T_0}\right) (\sqrt{3}\dot{N})^m N^n \frac{r_0^{m+n+3}}{m+n+3} \left[\frac{2\pi}{l_0\sqrt{3}}\right]^{m+n} \quad (4.7)$$

où r_0 et l_0 représentent respectivement le rayon et la longueur de la partie utile.

Les valeurs de départ des paramètres sont dans tous les cas: $K_0^0 = 1., [MPa s^m]$ $n^0 = 0.1$, $\beta^0 = 1000 [K]$, $m^0 = 0.1$.

Si les conditions sont isothermes ($T = T^0$), les résultats sont presque identiques pour une géométrie de type GI (tableau 4.12). Dans ce cas les hypothèses du modèle analytique sont entièrement respectées et on peut alors considérer cette comparaison comme étant une première validation en ce qui concerne le calcul éléments finis.

Tableau 4.12: Résultats d'identification pour une éprouvette de type GI

P	TYPE DE GÉOMÉTRIE: GI					
	I (isotherme)		A1 (anisotherme)		A2 (anisotherme)	
	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique
K_0	1.9391	1.9320	1.9363	2.1951	1.8548	5.2792
n	0.2903	0.2978	0.2905	0.2734	0.2926	0.1367
β	5001.68	5002.80	5018.98	4820.58	5054.26	3816.96
m	0.2031	0.2035	0.2031	0.1967	0.2034	0.1587
Q	5.13%	5.26%	5.13%	5.46%	5.12%	9.85%
itér.	8	11	9	10	14	12

Pour des conditions anisothermes les différences des résultats augmentent progressivement avec l'importance de l'effet d'autoéchauffement. Ainsi, plus la vitesse de rotation est grande et la température initiale petite (cas A2), plus le phénomène d'autoéchauffement est important et le calcul classique des paramètres négligeant ce phénomène devient non valable. En ce qui concerne la deuxième géométrie (tableau 4.13), pour les conditions isothermes de déformation, on constate peu de différences entre les valeurs identifiées.

Tableau 4.13: Résultats d'identification pour une éprouvette de type GII

P	TYPE DE GÉOMÉTRIE: GII					
	I (isotherme)		A1 (anisotherme)		A2 (anisotherme)	
	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique
K_0	1.9345	1.8027	1.9318	1.9514	1.8524	3.9567
n	0.2904	0.2965	0.2905	0.2778	0.2913	0.1672
β	5016.99	5002.96	5019.20	4863.43	5051.03	4080.61
m	0.2031	0.2035	0.2031	0.1976	0.2030	0.1631
Q	5.13%	5.41%	5.13%	5.56%	5.12%	8.66%
itér.	14	11	14	11	17	14

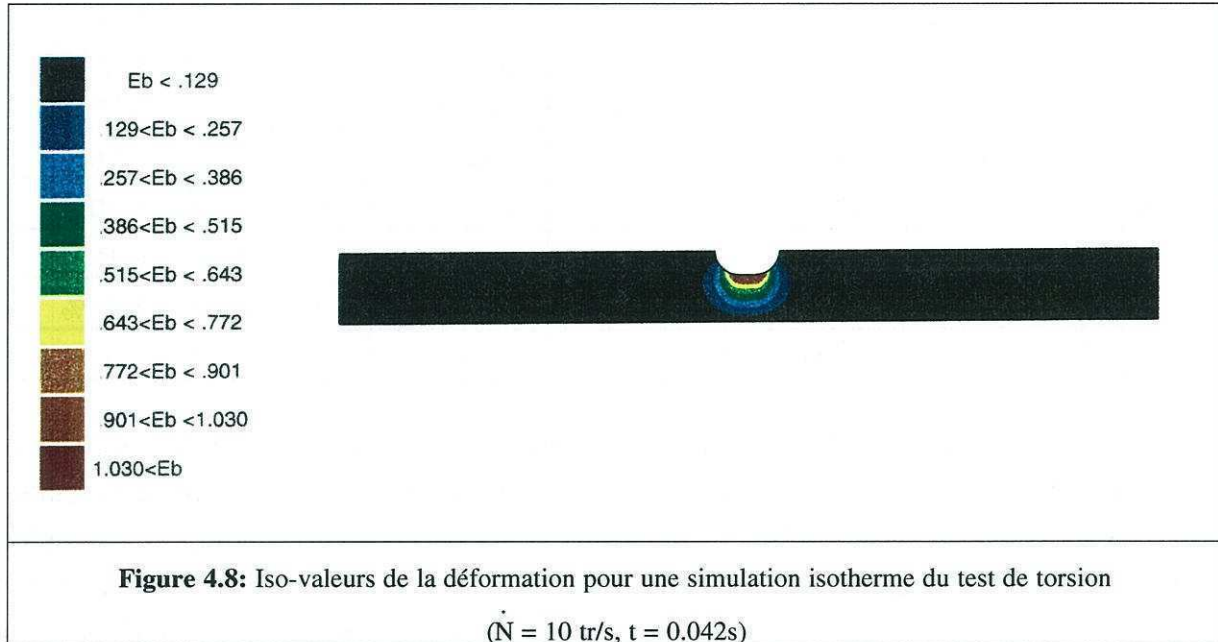
Ceci s'explique par l'influence réduite de l'entaille sur la distribution de la déformation dans la partie utile de l'éprouvette. Par contre on obtient toujours des différences importantes pour les tests anisothermes. Au fur et à mesure que les conditions thermiques deviennent plus sévères (importante augmentation de la température pendant l'essai - cas A2), les différences entre les valeurs des coefficients rhéologiques augmentent. Pour la dernière géométrie, dans des conditions isothermes de déformation, contrairement aux cas précédents, on constate une mauvaise estimation de la consistance K_0 si on utilise le modèle analytique (Tableau 4.14).

Tableau 4.14: Résultats d'identification pour une éprouvette de type GIII

P	TYPE DE GÉOMÉTRIE: GIII					
	I (isotherme)		A1 (anisotherme)		A2 (anisotherme)	
	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique	TORRAO	Modèle Analytique
K_0	1.9359	0.7949	1.9367	1.1324	1.8367	4.7064
n	0.2907	0.3095	0.2912	0.2702	0.2947	0.1405
β	5017.29	5002.06	5018.67	4756.58	5067.08	3803.67
m	0.2031	0.2035	0.2032	0.1897	0.2044	0.1193
Q	5.13%	5.81%	5.13%	5.81%	5.07%	10.56%
itér.	15	16	15	12	21	11

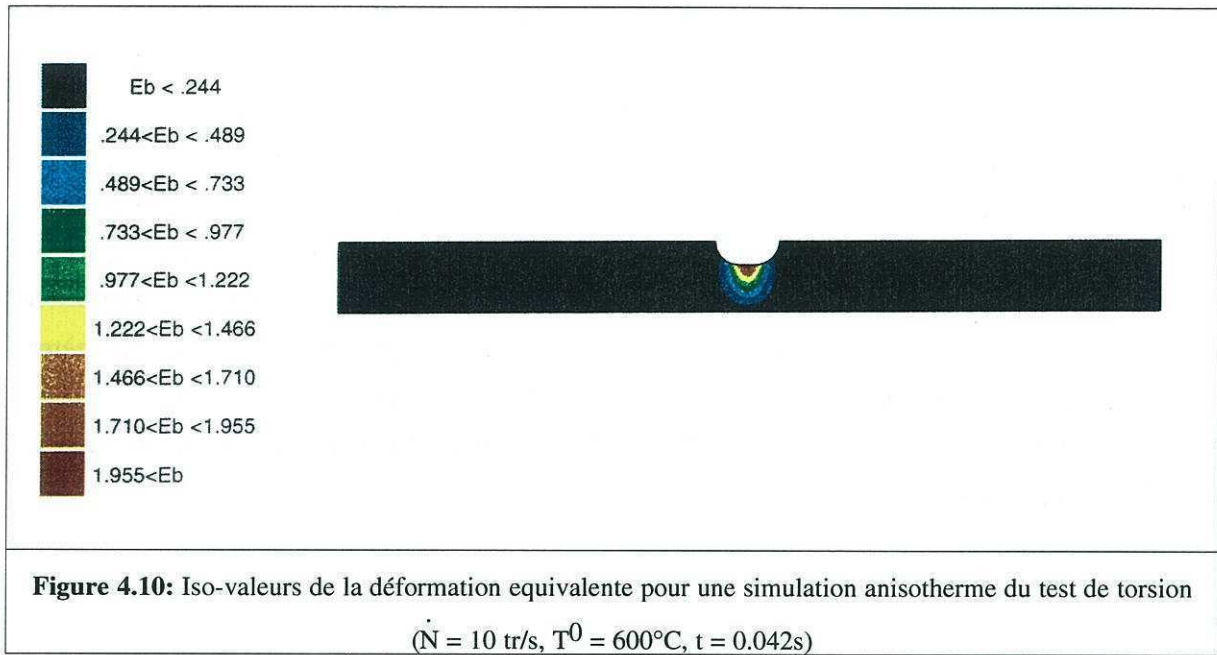
Dans ce cas on remarque qu'il est difficile d'établir la longueur de la partie utile, car plus le rapport $\frac{1}{d}$ devient petit, plus la composante radiale du champ de vitesse est importante.

Ainsi la Figure 4.8 montre qu'il faut tenir compte d'une distribution radiale-axiale de la déformation autour du congé.



Pour des conditions anisothermes les différences deviennent plus importantes, car une entaille plus petite augmente l'effet d'auto-échauffement (Figure 4.9) et conduit à une forte localisation de la déformation (Figure 4.10). Il est donc évident que dans ce cas le dépouillement par une méthode analytique est pratiquement impossible.





3. TEST DE TRACTION (LOGICIEL TRACTRAO)

La caractéristique essentielle d'un test de traction est le changement de la forme d'éprouvette à cause de l'apparition et du développement d'une striction. En utilisant un système vidéo-métrique, les enregistrements expérimentaux reposent non seulement sur la mesure de la force F^{ex} , mais aussi sur l'évolution de la géométrie de la surface extérieure, en particulier le diamètre de la striction d_s^x . Le but sera ici d'étudier d'un point de vue purement numérique l'influence des ces mesures expérimentales sur l'identification des paramètres rhéologiques. Partant du même principe de construction artificielle des données expérimentales, on simule plusieurs tests de traction, définis par les conditions présentées dans le Tableau 4.15.

Tableau 4.15: Géométrie d'éprouvettes et conditions de simulation des tests de traction

Géométrie d'éprouvette	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>SI</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>SII</p> </div> </div>
Loi rhéologique	<p>NORTON-HOFF (relation (4.1))</p> <p><u>valeurs nominales de paramètres:</u></p> <p>$K_0 = 2 \text{ [MPa s}^m\text{]}, n = 0.3, \beta = 5000 \text{ [K]}, m = 0.2$</p>
Conditions cinématiques	<p>$V_1 = 0.1 \text{ mm/s}, V_2 = 1 \text{ mm/s}, V_3 = 10 \text{ mm/s}$</p> <p>$\Delta l = 0.2 \text{ mm}, l_{max} = 10 \text{ mm}$</p>
Conditions thermiques (adiabatique)	<p>$T_1^0 = 800^\circ\text{C}, T_2^0 = 1000^\circ\text{C}$</p> <p>$\rho = 7500 \text{ [Kg/m}^3\text{]}, k = 30 \text{ [W/mK]}, c = 800 \text{ [J/KgK]}$</p>

Deux géométries d'éprouvette ont été utilisées: la géométrie SI, caractéristique des tests classiques, ayant comme objectif l'apparition tardive et diffuse de la striction, et la géométrie SII qui augmente l'effet de la striction par sa localisation au centre (forme en sablier).

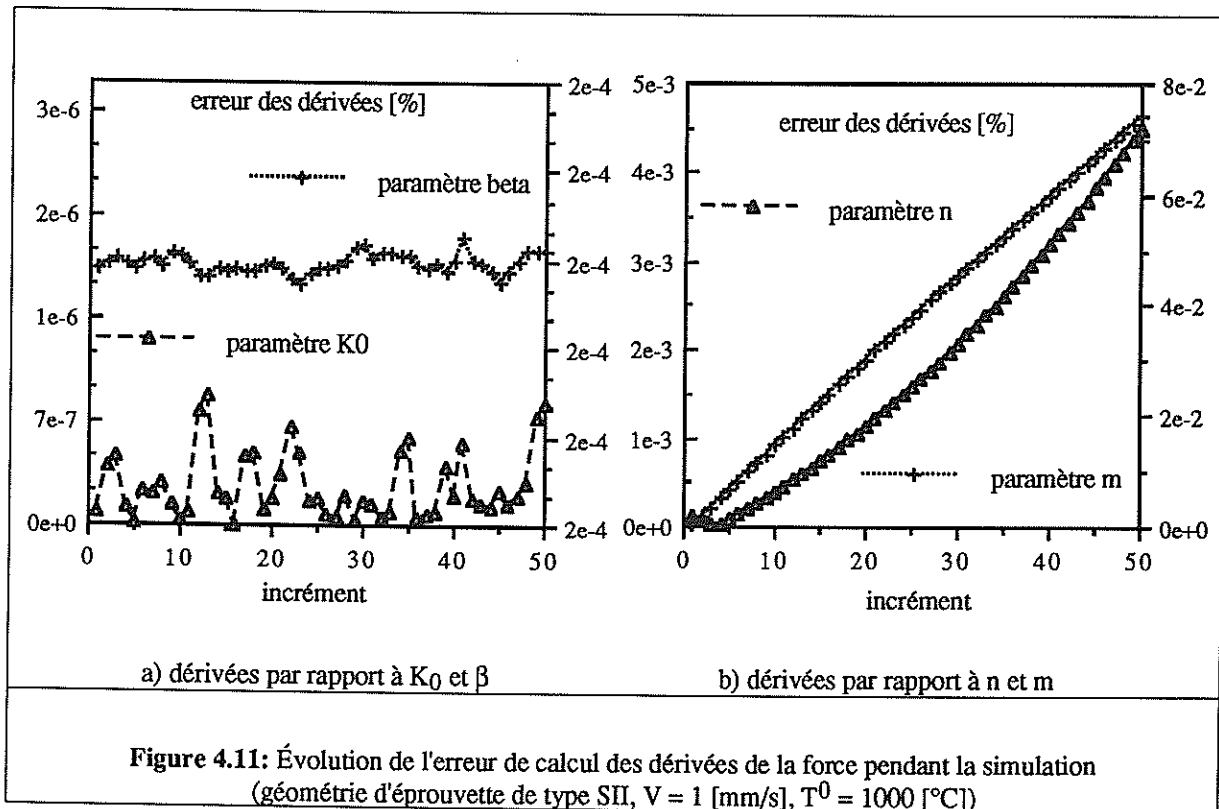
L'identification des paramètres rhéologiques résulte de la minimisation d'une fonction objectif que l'on exprime par:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^s [F_i^c - F_i^{ex}]^2}{\sum_{i=1}^s [F_i^{ex}]^2} + \gamma \frac{\sum_{i=1}^s [d_{si}^c - d_{si}^{ex}]^2}{\sum_{i=1}^s [d_{si}^{ex}]^2} \quad (4.8)$$

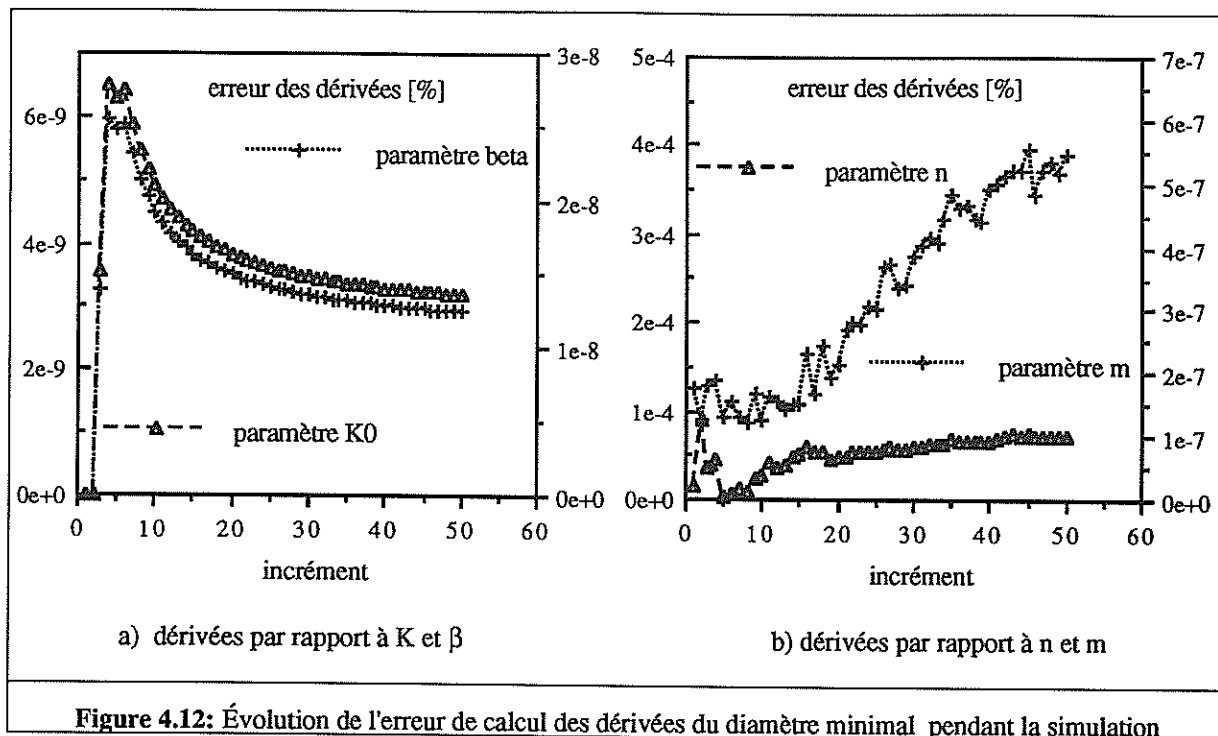
où $\gamma = 0$ si on identifie seulement à partir des forces ou $\gamma = 1$ si on prend en compte les mesures sur l'évolution du diamètre minimal.

3.1 TEST NUMÉRIQUE POUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Si dans le cas de la torsion l'influence des dérivées géométriques est très faible ou pratiquement nulle (si on néglige la dilatation thermique), pour la traction elle est très importante. Ainsi, afin de juger la validité du calcul de sensibilité, on doit vérifier simultanément l'erreur d'évaluation des dérivées de la force et du diamètre minimal. La Figure 4.11 donne les courbes de variation des erreurs relatives des dérivées des forces en fonction de l'incrément de calcul.



Pour la consistance K_0 et le coefficient de sensibilité thermique β , les erreurs de calcul des dérivées sont très faibles. En ce qui concerne les dérivées de la force par rapport aux n et m , on observe toujours une accumulation d'erreur numérique, surtout si on tient compte du fait qu'on utilise une évaluation explicite des termes $\frac{dX}{dP}$. Si on ajoute le fait que l'on a négligé les influences des dérivées géométriques sur le calcul de sensibilité de la pression, on peut considéré que l'ordre de précision de $\frac{dF}{dn}$ et $\frac{dF}{dm}$ (autour de 0.01% - 0.1%) est satisfaisant. Pour mettre en évidence la précision du calcul des dérivées géométriques, dans la Figure 4.12 on représente l'évolution de l'erreur d'évaluation des dérivées du diamètre minimal par rapport aux paramètres rhéologiques.



On constate qu'on obtient une bonne précision, même dans le cas des coefficient n et m , pour lesquels l'ordre de grandeur de l'erreur se situe autour de $10^{-4}\%$ - $10^{-7}\%$. De plus une extrapolation linéaire donne une erreur maximale de l'ordre de 0.01% pour 1000 incréments de simulation, ce qui permet de valider le calcul de sensibilité.

3.2 TEST DE CONVERGENCE

Pour étudier la convergence numérique du logiciel, on identifie les coefficients rhéologiques en utilisant deux jeux différents de valeurs initiales (Tableaux 4.16 et 4.17).

Tableau 4.16: Convergence de l'identification dans le cas de la géométrie SI (précision relative des valeurs paramétriques de $\approx 0.005\%$)

	cas 1 $K_0^0 = 0.1 \text{ MPas}^m, n^0 = 1., \beta^0 = 7000 \text{ K}, m^0 = 1.$		cas 2 $K_0^0 = 5 \text{ MPas}^m, n^0 = 0.05, \beta^0 = 3000 \text{ K}, m^0 = 0.05$	
	$\gamma = 0$ (sans prise en compte du diamètre)	$\gamma = 1$ (avec prise en compte du diamètre)	$\gamma = 0$ (sans prise en compte du diamètre)	$\gamma = 1$ (avec prise en compte du diamètre)
Q^0	95.62%	191.24%	42%	88%
Q	$0.3 \times 10^{-3}\%$	$1.4 \times 10^{-3}\%$	$0.2 \times 10^{-2}\%$	$0.6 \times 10^{-2}\%$
itér.	7	7	7	7

Tableau 4.17: Convergence de l'identification dans le cas de la géométrie SII (précision relative des valeurs paramétriques de $\approx 0.005\%$)

	cas 1 $K_0^0 = 0.1 \text{ MPas}^m, n^0 = 1., \beta^0 = 7000 \text{ K}, m^0 = 1.$		cas 2 $K_0^0 = 5 \text{ MPas}^m, n^0 = 0.05, \beta^0 = 3000 \text{ K}, m^0 = 0.05$	
	$\gamma = 0$ (sans prise en compte du diamètre)	$\gamma = 1$ (avec prise en compte du diamètre)	$\gamma = 0$ (sans prise en compte du diamètre)	$\gamma = 1$ (avec prise en compte du diamètre)
Q^0	98.50%	198.26%	71.71%	164.88%
Q	$0.3 \times 10^{-2}\%$	$0.7 \times 10^{-2}\%$	$0.3 \times 10^{-2}\%$	$1.5 \times 10^{-3}\%$
itér.	9	9	6	5

Pour les deux géométries étudiées on constate une convergence rapide (6-9 itérations) vers les valeurs nominales des paramètres. De plus par l'introduction de l'évolution du diamètre minimal on obtient des résultats comparables, ce qui permet de souligner une fois de plus la faisabilité du calcul d'identification, surtout en ce qui concerne l'évaluation des termes de sensibilités géométriques.

3.3 TEST DE STABILITÉ

L'influence d'une perturbation aléatoire normale a été étudiée pour la géométrie en sablier (SII), afin de rendre l'analyse de stabilité dans des conditions complexes de déformations. Une première analyse repose sur une identification basée uniquement sur les forces. Pour quatre niveaux de perturbation différents, les valeurs identifiées se trouvent toujours dans le voisinage de leurs valeurs nominales (Tableau 4.18).

Tableau 4.18: Résultats d'identification pour cinq niveaux de perturbation aléatoire dans le cas où la fonction coût s'exprime seulement en fonction des forces.

Erreur	Géométrie de type SII: $\gamma = 0$ (sans mesure du diamètre minimal)					
ϵ_F	K_0	n	β	m	Q [%]	itérations
1%	1.9830	0.2985	5008.49	0.2007	1.04	7
2%	1.9660	0.2971	5017.03	0.2014	2.07	7
5%	1.9150	0.2926	5043.83	0.2035	5.16	5
10%	1.8334	0.2854	5087.16	0.2070	10.20	6

Si la fonction coût comporte aussi le terme géométrique (expression 4.10 avec $\gamma = 1$), l'algorithme d'identification nécessite moins d'itérations (Tableau 4.19). On peut expliquer ces résultats par l'addition supplémentaire de l'influence de la sensibilité de la géométrie de la striction par rapport aux paramètres rhéologiques, notamment en ce qui concerne la vitesse de déformation m et le coefficient d'écrouissage n .

Tableau 4.19: Résultats d'identification pour cinq niveaux de perturbation aléatoire dans le cas où la fonction coût s'exprime simultanément en fonction des forces et des diamètres minimaux.

Erreur	Géométrie de type SII: $\gamma = 1$ (avec mesure du diamètre minimal: $\epsilon_d = 1\%$)					
ϵ_F	K_0	n	β	m	Q [%]	itérations
1%	1.9831	0.2986	5008.54	0.2007	2.05	5
2%	1.9663	0.2971	5017.15	0.2014	3.10	5
5%	1.9162	0.2927	5043.86	0.2035	6.20	5
10%	1.8345	0.2858	5087.66	0.2073	11.25	6

3.4 VALIDATION

Pour rendre pertinentes les hypothèses de déformations admises dans la méthode traditionnelle de dépouillement (distribution uniforme de la contrainte et de la déformation dans la partie utile de l'éprouvette), on considère la simulation des tests de traction isotherme ($T = 800^\circ\text{C}$ et $T = 1000^\circ\text{C}$), pour une géométrie de type SI et pour trois vitesses d'élongation différentes: 0.1mm/s, 1 mm/s et 10 mm/s.

Les valeurs de forces obtenues sont aléatoirement perturbées (5% d'erreur) et représentent ainsi l'espace "expérimental" F^{ex} employé pour l'identification. On limite les courbes force - déplacement générées par la simulation, à la partie qui précède la striction, car une fois la striction amorcée, le modèle classique de calcul analytique n'est pas du tout valide. Dans ce cas le modèle analytique exprime la force avec la relation suivante:

$$F^{an} = \pi K_0 \sqrt{3} \exp\left(\frac{\beta}{T_0}\right) \frac{r_0^2 l_0}{l} \left[\frac{V\sqrt{3}}{l}\right]^m (\ln \frac{l}{l_0})^n \quad (4.9)$$

où r_0 et l_0 sont respectivement le rayon et la longueur initiaux de la partie utile de l'éprouvette, et l représente la longueur correspondante à l'état déformé.

Le Tableau 4.20 regroupe les résultats d'identification obtenus avec TRACTRAO et avec une régression du modèle analytique.

Tableau 4.20: Identification des paramètres rhéologiques d'une loi de Norton-Hoff avec TRACTRAO et un modèle analytique classique.

Valeurs identifiées	K_0	n	β	m	Q	itérations
TRACTRAO	1.9047	0.2891	5041.87	0.2033	5.14%	9
Modèle Analytique	1.9010	0.3049	5109.87	0.2093	6.33%	9

Les paramètres rhéologiques ont des valeurs très proches, ce qui permet de juger le calcul éléments finis correct.

Pour la géométrie de type SII, l'écoulement dans la zone de striction est caractérisé par une distribution non-homogène de la déformation (Figure 4.13) et donc l'application d'une analyse classique n'est pas possible.

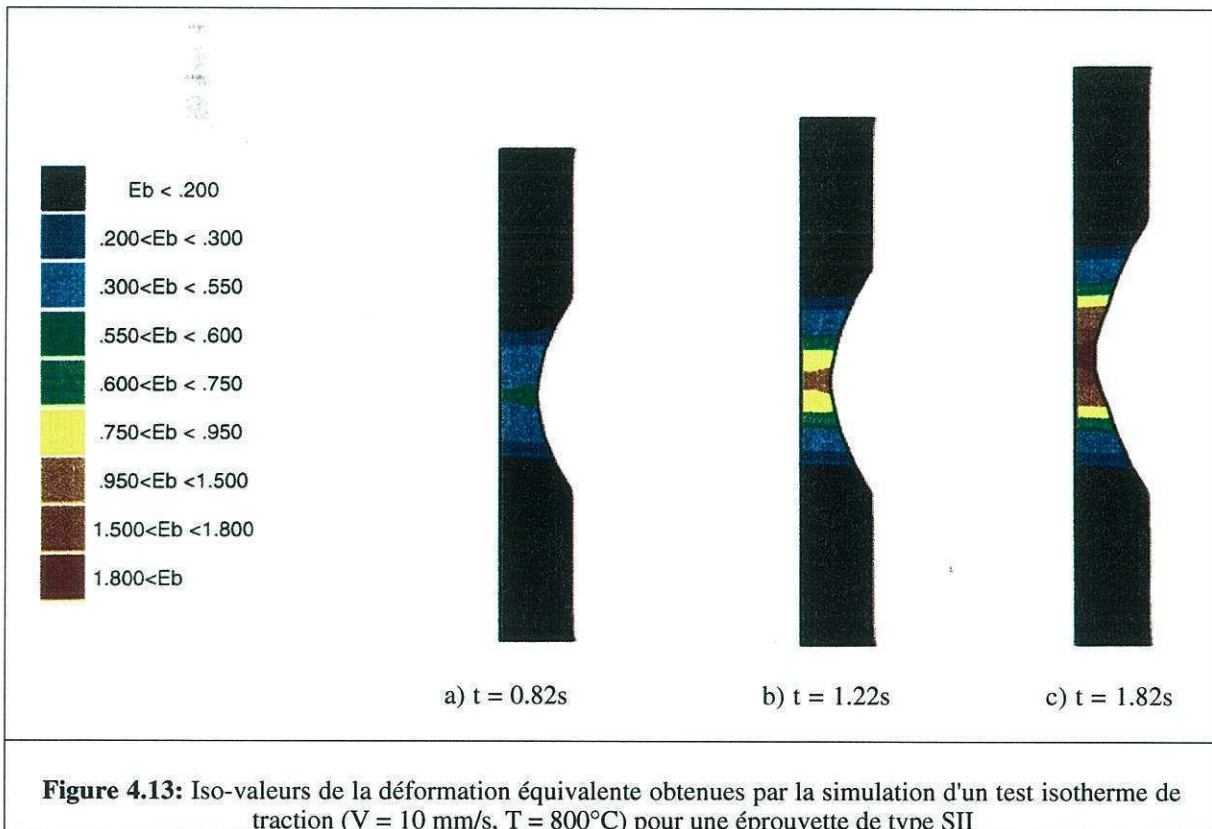


Figure 4.13: Iso-valeurs de la déformation équivalente obtenues par la simulation d'un test isotherme de traction ($V = 10$ mm/s, $T = 800^\circ\text{C}$) pour une éprouvette de type SII

Certaines améliorations d'un dépouillement analytique du test de traction ont été apportées par G'Sell ([G'SELL, 1983]), en utilisant un système vidéo-métrique pour mesurer l'évolution de la forme de la striction (diamètre minimal d et rayon de courbure r_c). La déformation équivalente caractéristique de la zone de striction est ainsi déterminée par l'expression:

$$\bar{\epsilon} = 2 \ln\left(\frac{d_0}{d}\right) \quad (4.10)$$

La principale difficulté réside ici dans l'évaluation de la distribution de contrainte équivalente au centre d'éprouvette. Des expressions analytiques approximatives sont obtenues en utilisant un facteur de correction géométrique (celui de Bridgman par exemple), déduites à partir d'une analyse de la forme a priori de la section ([CAILLET, 1994]). Il est de plus très difficile de quantifier analytiquement l'influence de l'évolution de la température pendant l'écoulement. Ainsi une simulation éléments finis à grande vitesse de traction (10 mm/s) met en évidence un écoulement complexe dans la zone de striction (Figure 4.14 et Figure 4.15), surtout si on tient compte du phénomène d'auto-échauffement ($\approx 100^\circ\text{C}$).

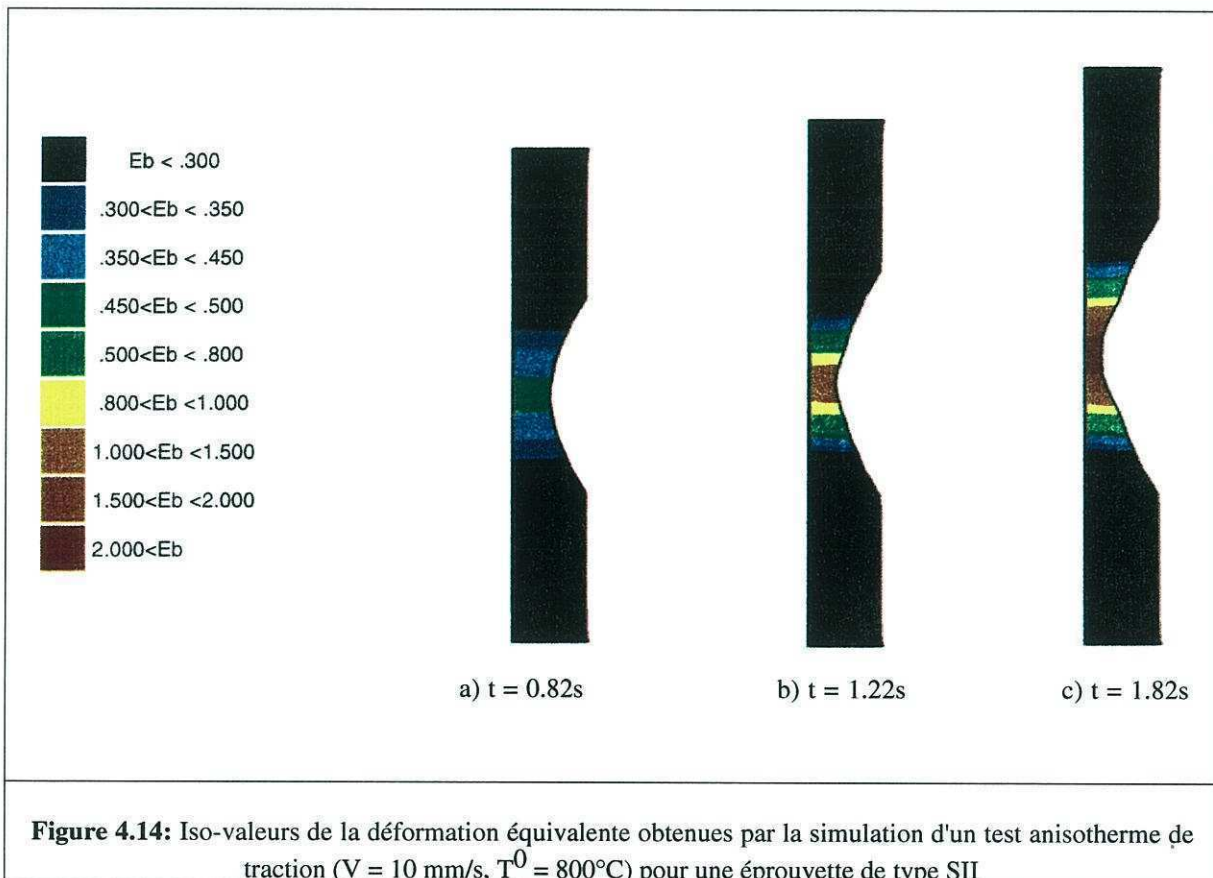


Figure 4.14: Iso-valeurs de la déformation équivalente obtenues par la simulation d'un test anisotherme de traction ($V = 10 \text{ mm/s}$, $T^0 = 800^\circ\text{C}$) pour une éprouvette de type SII

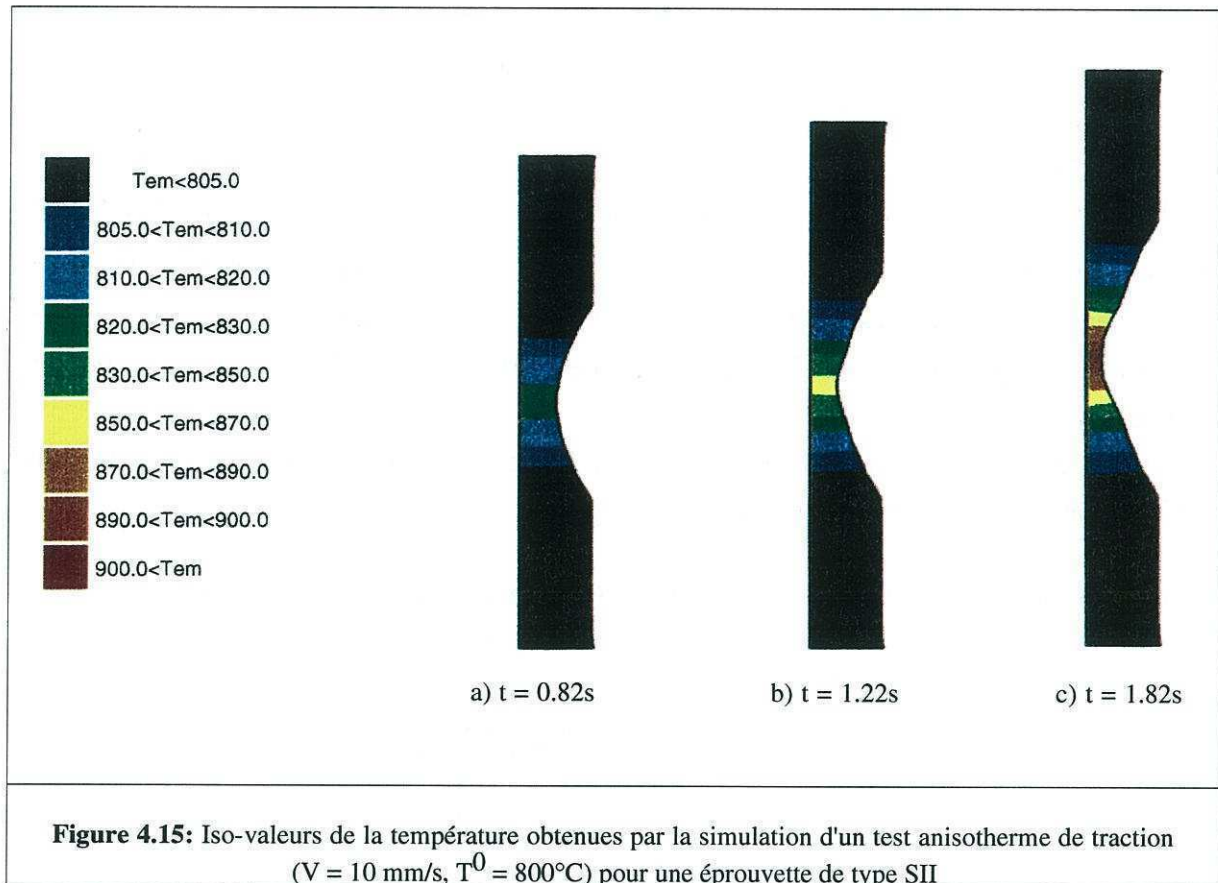


Figure 4.15: Iso-valeurs de la température obtenues par la simulation d'un test anisotherme de traction ($V = 10 \text{ mm/s}$, $T^0 = 800^\circ\text{C}$) pour une éprouvette de type SII

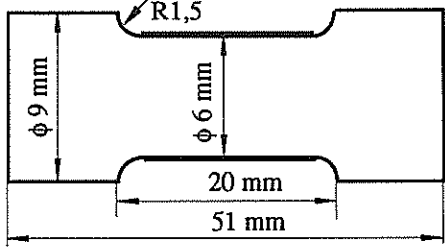
De ce point de vue la méthode éléments finis est plus performante, car elle est capable de décrire plus précisément l'évolution de l'écoulement, avec un calcul rigoureux des contraintes et donc de la force de traction. De plus, les études de convergence et de stabilité de la méthode d'identification proposée ont montré que, pour identifier une loi de Norton-Hoff simple, il suffit d'utiliser les valeurs des forces comme mesures expérimentales. Dans ce cas l'instrumentation expérimentale est moins coûteuse, car on a seulement besoin d'un capteur de force. Mais, ayant montré la possibilité d'utiliser des fonctions coûts mixtes (ou multi-objectif), il reste à étudier l'importance des mesures sur le changement de la géométrie à la striction, pour des lois plus sophistiquées, avec plus de paramètres et permettant l'introduction de variables liées à la microstructure.

4. TEST DE TRACTION-TORSION (LOGICIEL TRACTORRAO)

L'intérêt de développer des analyses rhéologiques pour des chemins de déformations plus complexes, nous a conduit à utiliser la méthode d'identification proposée pour un essai combiné de traction-torsion. Le principe de ce test est de superposer deux sollicitations simples, une torsion (vitesse de rotation \dot{N}) et une traction (vitesse d'élongation V) et de mesurer en même temps les valeurs des forces F^{ex} et des couples C^{ex} . On obtient ainsi des réponses correspondant à un état de contrainte multiaxial, difficile à analyser par les méthodes traditionnelles.

Les conditions de simulation définissant la construction de l'espace expérimental artificiel sont décrites dans le Tableau 4.21.

Tableau 4.21: Géométrie d'éprouvettes et conditions de simulation des tests de traction-torsion

Géométrie d'éprouvette	<p style="text-align: center;">SGI</p> 
Loi rhéologique	<p>NORTON-HOFF (relation (4.1))</p> <p><u>valeurs nominales de paramètres:</u></p> <p>$K_0 = 2 \text{ [MPas}^m\text{]}, n = 0.3, \beta = 5000 \text{ [K]}, m = 0.2$</p>
Conditions cinématiques (pilotage)	<p>$V_1 = 1 \text{ mm/s}, V_2 = 10 \text{ mm/s}$</p> <p>$\dot{N}_1 = 1 \text{ tr/s}, \dot{N}_2 = 10 \text{ tr/s}$</p> <p><u>acquisition:</u> $\Delta N = 0.02 \text{ tours}, N_{\max} = 1. \text{ tour}$</p>
Conditions thermiques (adiabatique)	<p>$T_1^0 = 800^\circ\text{C}, T_2^0 = 1000^\circ\text{C}$</p> <p>$\rho = 7500 \text{ [Kg/m}^3\text{]}, k = 30 \text{ [W/mK]}, c = 800 \text{ [J/KgK]}$</p>

L'analyse numérique que l'on propose consiste à étudier l'identification des paramètres rhéologiques par la minimisation d'une fonction coût écrite sous la forme:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^s [F_i^c - F_i^{ex}]^2}{\sum_{i=1}^s [F_i^{ex}]^2} + \frac{\sum_{i=1}^s [C_i^c - C_i^{ex}]^2}{\sum_{i=1}^s [C_i^{ex}]^2} \quad (4.11)$$

4.1 TEST DE CONVERGENCE

On cherche de façon classique à identifier les valeurs nominales des paramètres, en partant des estimations initiales assez éloignées. Le Tableau 4.22 synthétise les résultats d'identification obtenus pour deux estimations initiales différentes.

Tableau 4.22: Identification des paramètres partant de deux jeux initiaux différents de coefficients rhéologiques.

Paramètres (P)	Valeurs nominales	Cas 1		Cas 2	
		Valeurs initiales	Valeurs identifiées	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K_0	2.	5.	2.0000	0.1	1.9999
n	0.3	0.05	0.3000	1.	0.2999
β	5000.	7000.	5000.01	3000.	5000.00
m	0.2	0.05	0.1999	1.	0.2000
Q	0	64.85%	$0.5 \times 10^{-3}\%$	111.1%	$0.4 \times 10^{-3}\%$
itérations	-	-	6	-	6

On constate donc une convergence rapide vers les valeurs nominales des coefficients rhéologiques.

4.2 TEST DE STABILITÉ

On suppose que le niveau d'incertitude sur les mesures des forces et des couples est équivalente. Les identifications correspondant à des perturbations variant entre 1% et 10% (tableau 4.23) montrent que les valeurs des paramètres sont toujours proches de ceux qui ont servi à générer l'espace expérimental, même si l'incertitude sur les données mesurées est assez grande (10% par exemple).

Tableau 4.23: Résultats d'identification correspondant à cinq niveaux de perturbation aléatoire.

Erreur	Cas 1					
$\varepsilon_F = \varepsilon_C$	K_0 [MPas ^m]	n	β [K]	m	Q/2 [%]	itérations
1%	1.9883 ± 0.0397	0.2978 ± 0.0019	5002.11 ± 22.1132	0.2010 ± 0.0012	1.03	6
2%	1.9766 ± 0.0788	0.2955 ± 0.0038	5004.26 ± 44.21	0.2019 ± 0.0024	2.07	6
5%	1.9414 ± 0.1932	0.2889 ± 0.0094	5011.05 ± 110.3856	0.2048 ± 0.0059	5.14	6
10%	1.8828 ± 0.3741	0.2781 ± 0.0186	5023.48 ± 220.33	0.2097 ± 0.0119	10.20	6

5. CONCLUSIONS

Les études numériques présentées dans ce chapitre mettent en évidence la faisabilité de la méthode d'identification proposée, en ce qui concerne la convergence et la stabilité des logiciels développés: TORRAO, TRACTRAO et TRACTORRAO. On souligne ainsi la capacité de ces logiciels à identifier les paramètres rhéologiques d'une loi de type Norton-Hoff en un nombre raisonnable d'itérations (variant entre 6 et 20). De plus, les exemples de calcul de validation que nous avons choisis montrent la fiabilité du calcul d'identification, car si les conditions d'un dépouillement classique sont entièrement remplies, les valeurs des coefficients rhéologiques sont très proches.

Il est d'autant plus important de mentionner la possibilité d'analyser le comportement des matériaux dans des conditions complexes de sollicitation (éprouvettes entaillées, gradient thermique important) et pour des grandes déformations (ordre de grandeur de $\bar{\varepsilon} \approx 100\% - 200\%$). Ceci nous permet d'envisager l'application de cette procédure automatique d'identification à l'identification du comportement rhéologique des matériaux, en partant des mesures expérimentales obtenues par des essais rhéologiques réels.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS:

ANALYSE RHÉOLOGIQUE DES MATÉRIAUX THERMO-VISCOPLASTIQUES

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on présente des exemples d'utilisation du logiciel d'identification pour l'analyse du comportement thermo-viscoplastique des alliages métalliques et des polymères solides. On partira toujours de lois simples auxquelles on ajoutera progressivement des nouveaux paramètres, en introduisant, d'une façon plus complexe, l'influence de la déformation et de la température.

Pour les alliages métalliques, on utilise les relations générales (1.44) et (1.45), établies dans le chapitre 1 (§4.2). On rappelle ainsi que la consistance est définie en fonction de trois composantes rhéologiques par l'expression:

$$K(P, \bar{\epsilon}, T) = K_{ecr} [1-W] + K_{sat}W \quad (5.1)$$

où K_{ecr} décrit l'écrouissage, W quantifie le taux d'adoucissement et K_{sat} exprime le palier de saturation. Dans le cas du test de torsion, si les courbes expérimentales ne mettent pas en évidence le palier de saturation après le pic du couple, on considérera que l'on a $K_{sat} \equiv 0$.

Pour les polymères solides on identifie une loi de G'Sell [G'SELL, 1988], pour laquelle la consistance est écrite sous la forme multiplicative suivante:

$$K = K_{ve}K_{cr}K_{dr}K_T \quad (5.2)$$

où K_{ve} représente la composante de déformation visco-élastique, K_{cr} définit le crochet, K_{dr} permet la description du durcissement structural et K_T prend en compte l'influence de la température.

Le but principal de ce chapitre est de montrer la capacité du logiciel à identifier des lois plus complexes et son utilité dans des études concernant la recherche de lois de comportement de type thermo-viscoplastique, correspondant à une description plus précise de l'écoulement en grandes déformations. Les analyses que nous présentons concernent les principales catégories

d'alliages métalliques: acier (XC55), alliage d'aluminium (AG5), alliage de titane (TA6V) et des polymères solides: l'un amorphe (Polycarbonate) et l'autre semi-cristallin (Polyéthylène).

2. ACIER: XC55

En vue d'analyser la rhéologie d'un acier classique de type XC55, on a utilisé comme informations expérimentales les courbes de torsion obtenues dans les conditions décrites dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1: Conditions opératoires définissant le test de torsion de l'acier XC55, pour une éprouvette normalisée ($L = 51$ mm, $D = 9$ mm, $l = 8$ mm, $d = 6$ mm)

Conditions expérimentales	a	b	c	d
Vitesse de rotation [tr/s]	3.7	0.3	0.3	3.7
Température initiale [°C]	800	850	900	950

Avec une loi de comportement de type Norton-Hoff (voir relations (1.44) et (1.45)), trois formulations différentes ont été choisies afin de décrire les fonctions rhéologiques associées à la définition de la consistance et à la variation du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation avec la température (Tableau 5.2).

Tableau 5.2: Définition des fonctions rhéologiques correspondant à une loi de type Norton-Hoff généralisée

Loi	K_{ect}	W	m	Paramètres P
I	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	0.	m_0	$\{K_0, n, \beta, m_0\}$
II	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^{n_0 + n_1 \bar{\epsilon}} \exp(\frac{\beta}{T})$	0.	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n_0, n_1, \beta, m_0, m_1\}$
III	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r, \beta, m_0, m_1\}$
IV	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$ $r = (r_0 + \frac{r_1}{T})\dot{\epsilon} r_2$	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r_0, r_1, r_2, \beta, m_0, m_1\}$

La première loi introduit l'influence de la déformation et de la température en utilisant la formulation classique de l'écrouissage (loi puissance) et de la thermo-dépendance (loi exponentielle).

La loi de type II suppose une variation linéaire du coefficient d'écrouissage avec la déformation plastique et une dépendance linéaire du coefficient m en fonction de la température.

Enfin, les deux dernières lois supposent le coefficient d'écrouissage constant et introduisent l'influence du phénomène d'adoucissement avec la définition standard du taux global d'adoucissement W , par l'intermédiaire du coefficient r .

Les résultats d'identification correspondant aux lois constitutives choisies sont reportés dans le Tableau 5.3.

Tableau 5.3: Résultats d'identification obtenus avec TORRAO pour chaque type de loi ($4 \leq$ nombre des paramètres ≤ 8) et comparaison avec un modèle d'identification analytique dans le cas de la loi classique.

	Valeurs Initiales	Valeurs Identifiées				
Identification		Analytique	Éléments Finis			
Loi		I	I	II	III	IV
Itérations		15	5	6	8	13
Q [%]	321.57	8.	6.7	5.2	4.2	2.6
K_1	2.	1.3257	1.1923	0.7189	1.7318	2.9559
n_0	0.1	0.1783	0.2010	0.1635	0.3314	0.3307
n_1	0.	0.	0.	-1.0147	0.	0.
β	6000.	4722.27	4922.87	5115.64	4989.90	4408.51
r_0	0.	0.	0.	0.	0.6701	2.4410
r_1	0.	0.	0.	0.	0.	-1980.57
r_2	0.	0.	0.	0.	0.	-0.1612
m_0	0.1	0.1120	0.1197	-0.0174	0.0441	0.0031
$m_1 \times 10^3$	0.	0.	0.	0.1219	0.0695	0.0673

Afin d'étudier la pertinence des résultats obtenus, les coefficients identifiés dans le cas de la loi classique (loi I) ont été comparés avec ceux déterminés par la régression d'un modèle analytique. On constate peu de différences entre les valeurs de paramètres, mais on observe que ceux déterminés par l'identification éléments finis permettent d'avoir une meilleure concordance entre le calcul et l'expérience.

Donc, la première constatation que l'on peut faire est que, en utilisant la loi simple de type I, bien que les valeurs des paramètres identifiées soient très proches, la fonction coût est plus faible dans le cas d'une identification par notre approche éléments finis (6.7%), que dans le cas de l'analyse analytique (8%). Cette écart est encore plus visible sur les figures 5.1a) et 5.1b), lorsque l'on compare les résultats de simulation du test obtenus avec les deux jeux de

paramètres. En particulier, on observe qu'on obtient des valeurs très proches pour les petites vitesses de déformation (courbe b et d) et assez différentes pour les plus grandes vitesses (courbe a et c). Ceci s'explique par le fait que le phénomène d'autoéchauffement est d'autant plus important que la vitesse de déformation est plus grande, ce qui rend le modèle d'identification analytique trop approximatif. De plus, la simulation éléments finis tient compte des caractéristiques thermiques du matériau, notamment en ce qui concerne la conductivité ($k = 30$ [W/mK]) et la chaleur massique ($c = 800$ [J/KgK]).

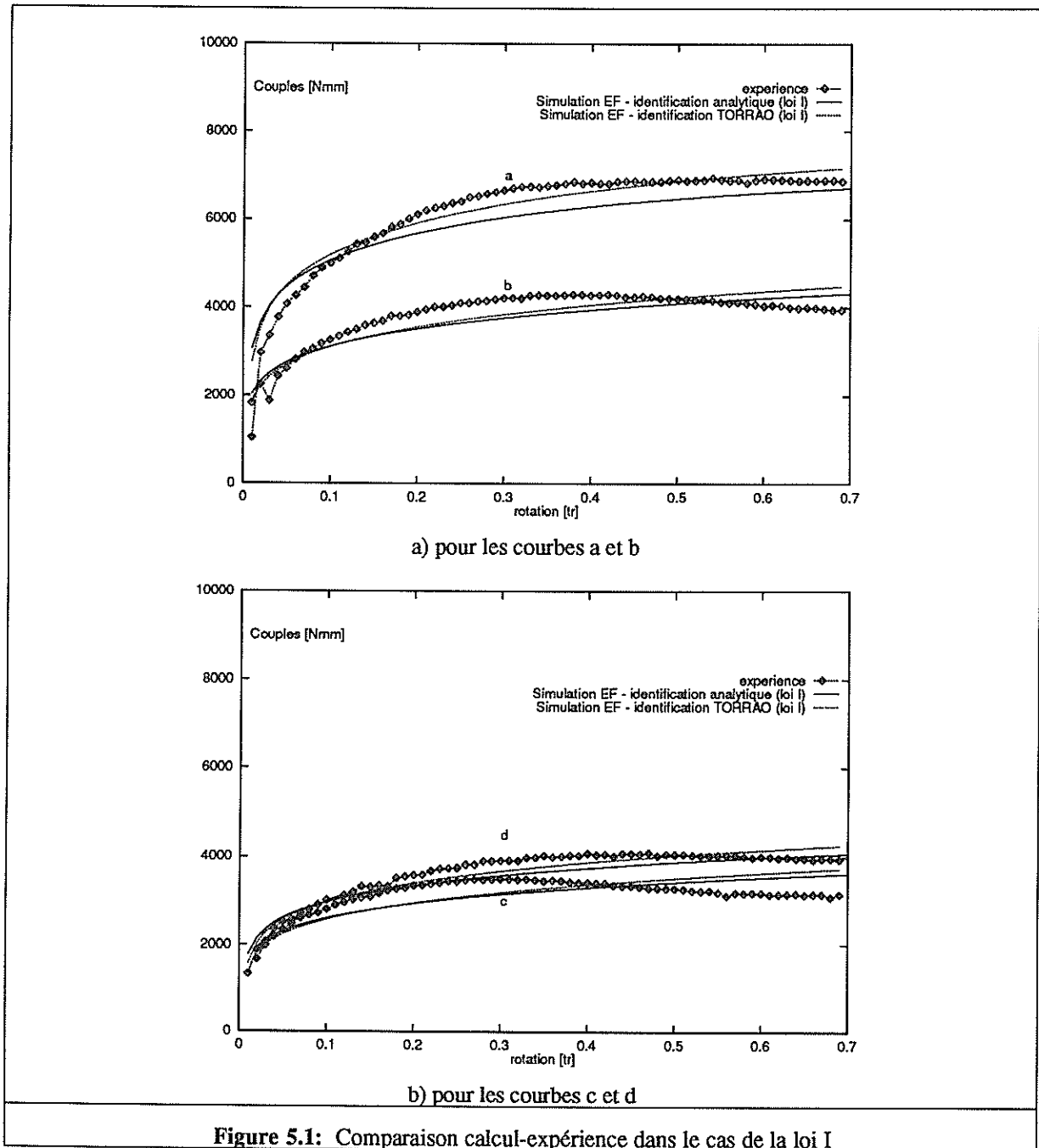
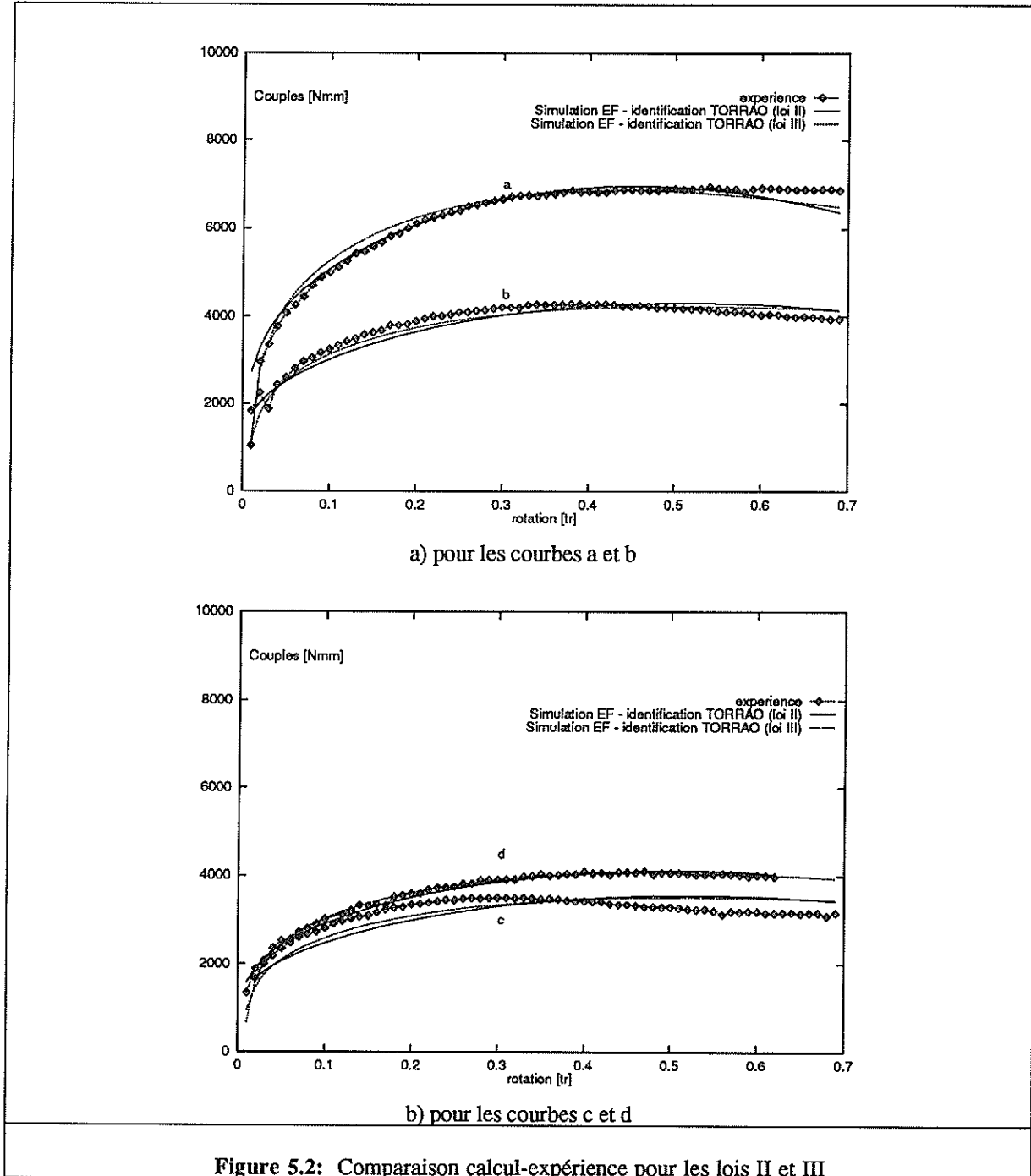


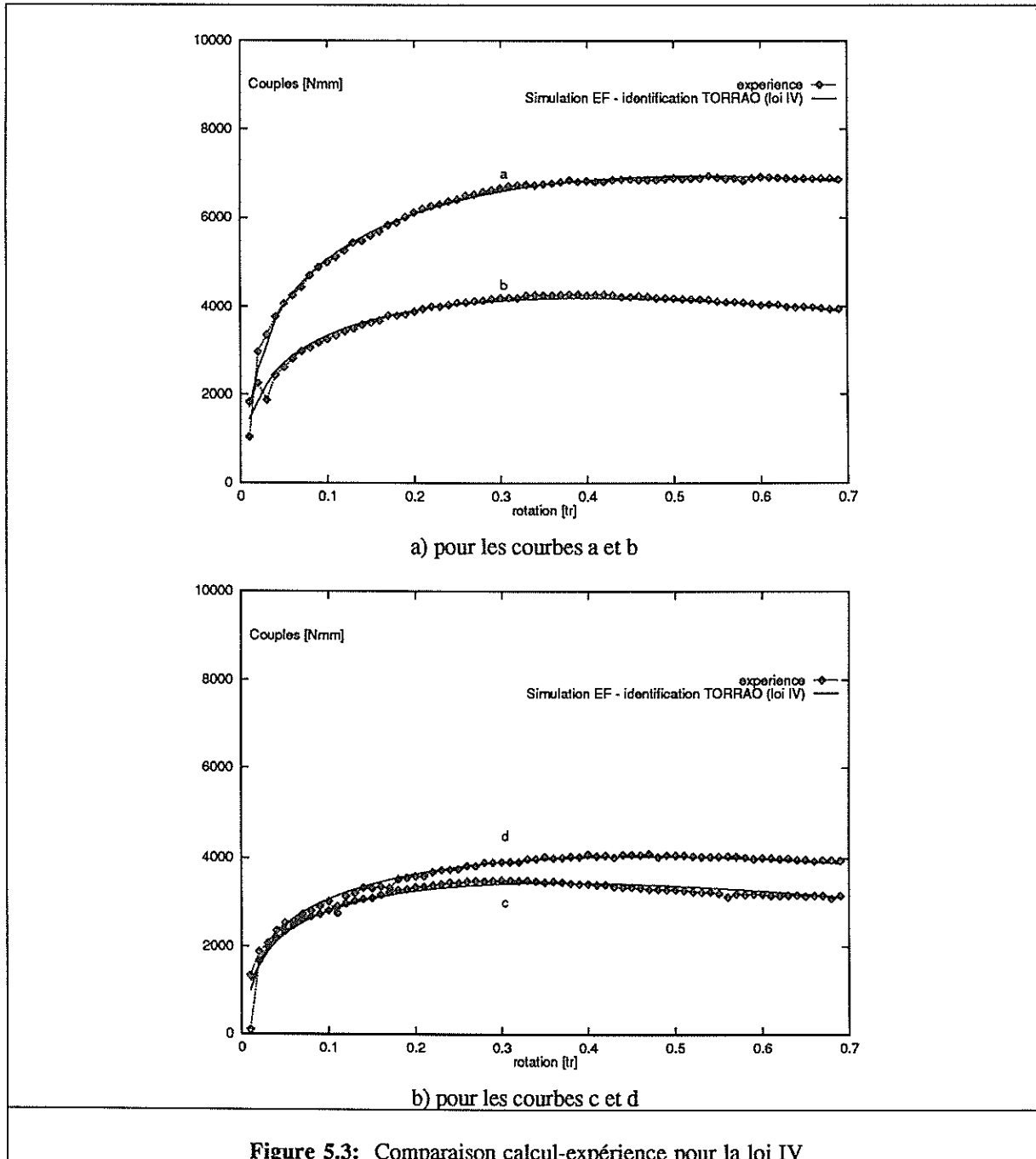
Figure 5.1: Comparaison calcul-expérience dans le cas de la loi I

L'addition de paramètres supplémentaires, par l'introduction de lois plus complexes, conduit à une diminution de la fonction coût (5.2% pour la loi II et 4.2% pour la loi III), donc à une description plus adéquate des courbes expérimentales (Figure 5.2 a et b).



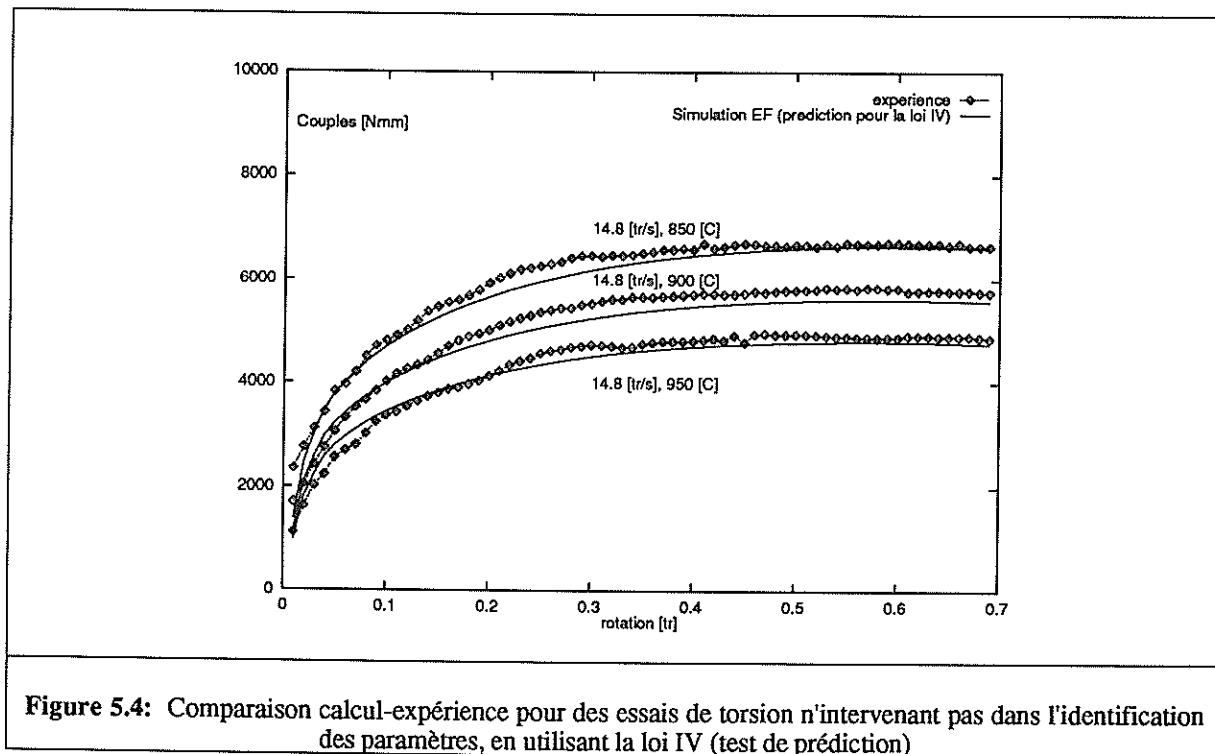
On peut ainsi décrire la partie descendante des courbes, donc la présence de phénomènes d'adoucissement. Du point de vue qualitatif il est assez difficile de choisir la loi la plus réaliste. La plus petite valeur de la fonction coût peut être un critère de choix. On juge ainsi plus adéquate la loi de type III pour laquelle on obtient $Q = 4.2\%$. Pour diminuer encore la valeur de

la fonction coût, il est nécessaire d'approfondir l'analyse rhéologique, en introduisant par exemple une variation du coefficient d'adoucissement r en fonction de la température et de la vitesse de déformation, décrite par la loi IV. La Figure 5.3 montre que dans ce cas l'accord avec l'expérience est très bon.



Une étude essentielle concerne la vérification du niveau de prédiction de la loi déterminée, autrement dit, la possibilité de décrire précisément des courbes de torsion correspondant à des conditions opératoires différentes de celles qui ont servi à l'identification. Nous avons ainsi

choisi de simuler la torsion d'éprouvette à une grande vitesse de rotation ($\dot{N} = 14.8$ tr/s) et pour trois températures différentes ($T^0 = 850$ C, 900 C et 950 C). Les comparaisons avec l'expérience, reportées sur la Figure 5.4, montrent qu'on obtient un bon accord (écart moyen sur tous les points de l'ordre de 3.6%). On peut donc conclure que la qualité prédictive de la simulation éléments finis est ainsi assurée.



3. ALLIAGE D'ALUMINIUM: AG5

Pour la nuance AG5 d'un alliage d'aluminium, on a retenu six courbes expérimentales de torsion, correspondant à trois vitesses de rotation différentes et deux températures initiales (Tableau 5.4).

Tableau 5.4: Conditions opératoires définissant le test de torsion d'une nuance d'aluminium de type AG5 pour une éprouvette ayant les dimensions suivantes: $L = 33$ mm, $D = 8$ mm, $l = 21$ mm, $d = 4$ mm.

Conditions expérimentales	a	b	c	d	e	f
Vitesse de rotation [tr/s]	16.70	1.670	0.167	16.70	1.670	0.167
Température initiale [°C]	300	300	300	400	400	400

Les lois constitutives que l'on propose d'identifier sont définies dans le Tableau 5.5.

Tableau 5.5: Expressions des fonctions rhéologiques choisies

Loi	K_{ecr}	W	m	Paramètres P
I	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	0.	m_0	$\{K_0, n, \beta, m_0\}$
II	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r, \beta, m_0, m_1\}$
III	$K_0(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$ $r = r_0 + r_1 T$	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r_0, r_1, \beta, m_0, m_1\}$
IV	$K_0 \sqrt{1 - \exp[-n(\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0)]} \exp(\frac{\beta}{T})$ $n = n_0 + n_1 T$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$ $r = r_0 + r_1 T$	$m = m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n_0, n_1, r_0, r_1, \beta, m_0, m_1\}$

Le principe de formulation de la loi est le même que précédemment. Partant de la formulation classique, on augmente progressivement la complexité des fonctions rhéologiques K_{ecr} et W pour décrire la compétition entre l'écroutissage et l'adoucissement.

Les résultats d'identification sont reportés au Tableau 5.6. On souligne que, pour l'identification par la méthode éléments finis, on tient compte des caractéristiques thermiques des matériaux ($k=240$ [W/mK], $c=1070$ [J/KgK]).

 Tableau 5.6: Résultats d'identification pour chaque loi ($4 \leq \text{nombre des paramètres} \leq 8$).

	Valeurs Initiales	Valeurs Identifiées				
Identif.		Analytique	Éléments Finis			
Loi		I	I	II	III	IV
Itérations		4	4	7	9	9
Q [%]	112.3	12.5	11.1	6.6	4.9	4.4
K_1	1.	1.273	1.020 ± 0.228	0.399 ± 0.038	1.260 ± 0.127	0.663 ± 0.079
n_0	0.1	0.140	0.185 ± 0.016	0.219 ± 0.009	0.215 ± 0.007	-39.44 ± 10.02
n_1	0.	0.	0.	0.	0.	0.086 ± 0.017
r_0	0.	0.	0.	0.329 ± 0.016	-1.129 ± 0.100	-1.109 ± 0.122
$r_1 \times 10^2$	0.	0.	0.	0.	0.239 ± 0.020	0.193 ± 0.019
β	6000.	2445.08	2639.6 ± 135.3	3281.3 ± 56.8	2572.8 ± 60.9	2790.2 ± 75.9
m_0	0.1	0.104	0.118 ± 0.008	-0.487 ± 0.041	-0.552 ± 0.030	-0.538 ± 0.025
$m_1 \times 10^2$	0.	0.	0.	0.101 ± 0.007	0.112 ± 0.005	0.109 ± 0.004

Pour la première loi on a utilisé seulement la partie ascendante des courbes ($N_{\max} = 2$) et on a comparé les valeurs identifiées avec celles obtenues par une méthode analytique. Les paramètres identifiés dans les deux cas sont du même ordre de grandeur.

Pour mieux mettre en évidence la faisabilité de la loi choisie, on compare les courbes de torsion obtenues par la simulation, en utilisant les deux jeux de paramètres obtenus pour la loi I (Figure 5.5).

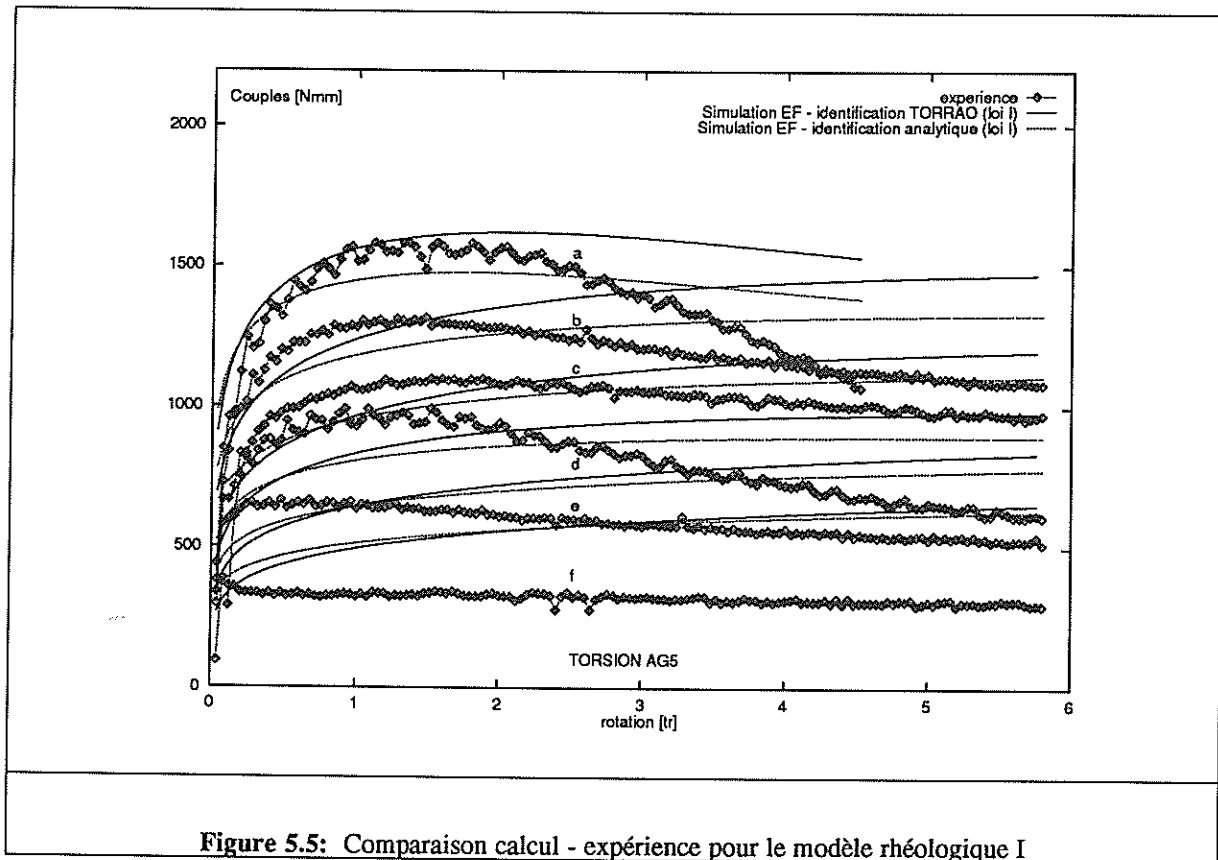


Figure 5.5: Comparaison calcul - expérience pour le modèle rhéologique I

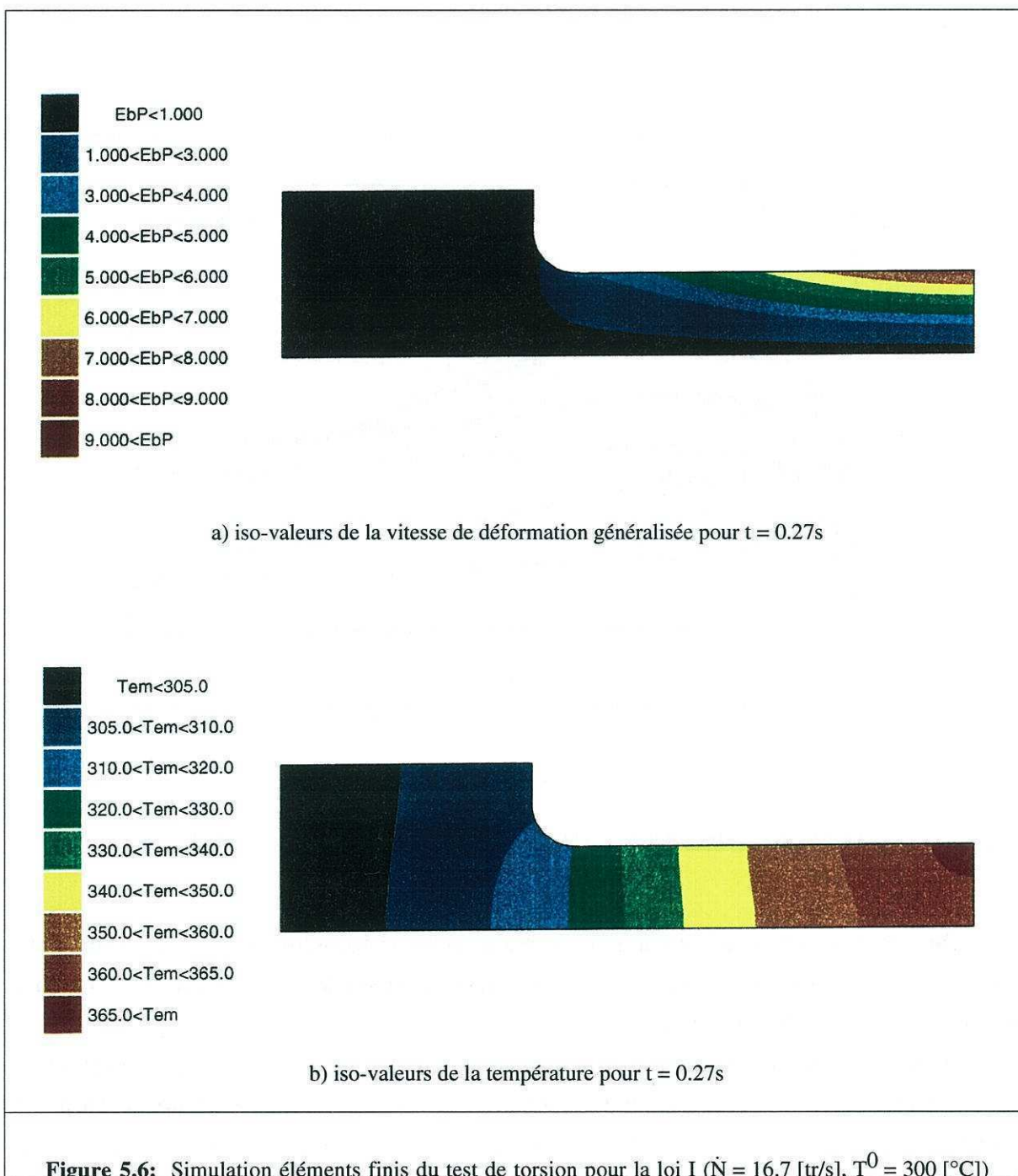
On constate ainsi qu'aucun jeu de paramètres rhéologiques ne peut représenter correctement la variation des couples de torsion, l'erreur moyenne de prédiction sur la majorité des courbes ($N_{\max} = 5.8$) étant de $\approx 20\%$.

De plus, les iso-valeurs de la vitesse de déformation généralisée et de la température (Figure 5.6a et b) montrent que les hypothèses traditionnelles ne sont pas valables, car même pour une loi de type I, on observe une importante localisation de la déformation et un fort auto-échauffement (de l'ordre de 65°C à 0.27 s) au centre de l'éprouvette.

Il est donc impossible d'utiliser la méthode analytique pour déterminer correctement des lois de comportement capables de décrire l'allure descendante des courbes, car dans ce cas

l'identification doit tenir compte des valeurs des couples correspondant aux grandes déformations ($N_{\max} = 5.8$).

En conséquence une étude plus précise du comportement, en utilisant l'analyse inverse d'une simulation éléments finis, est indispensable.



Ainsi, si on introduit la fonction d'adoucissement ($W \neq 0$ dans le cas de la loi II et III), la rhéologie identifiée avec TORRAO donne une meilleure concordance entre le calcul et l'expérience, surtout si on suppose une variation linéaire du coefficient d'adoucissement r avec la température. Dans ce dernier cas l'écart est plus faible (de l'ordre de 5%) et la comparaison des courbes montre que les allures correspondent assez bien avec celles obtenues expérimentalement (Figure 5.7).

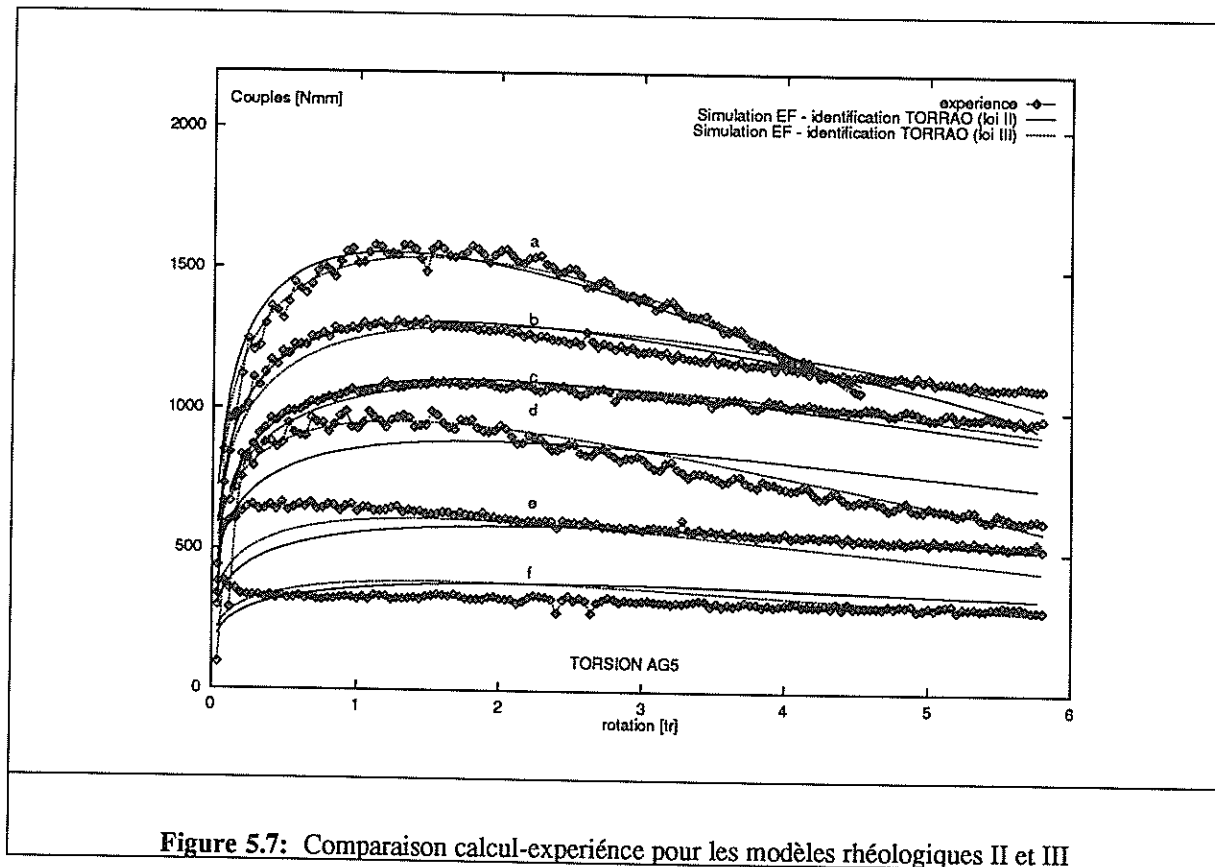
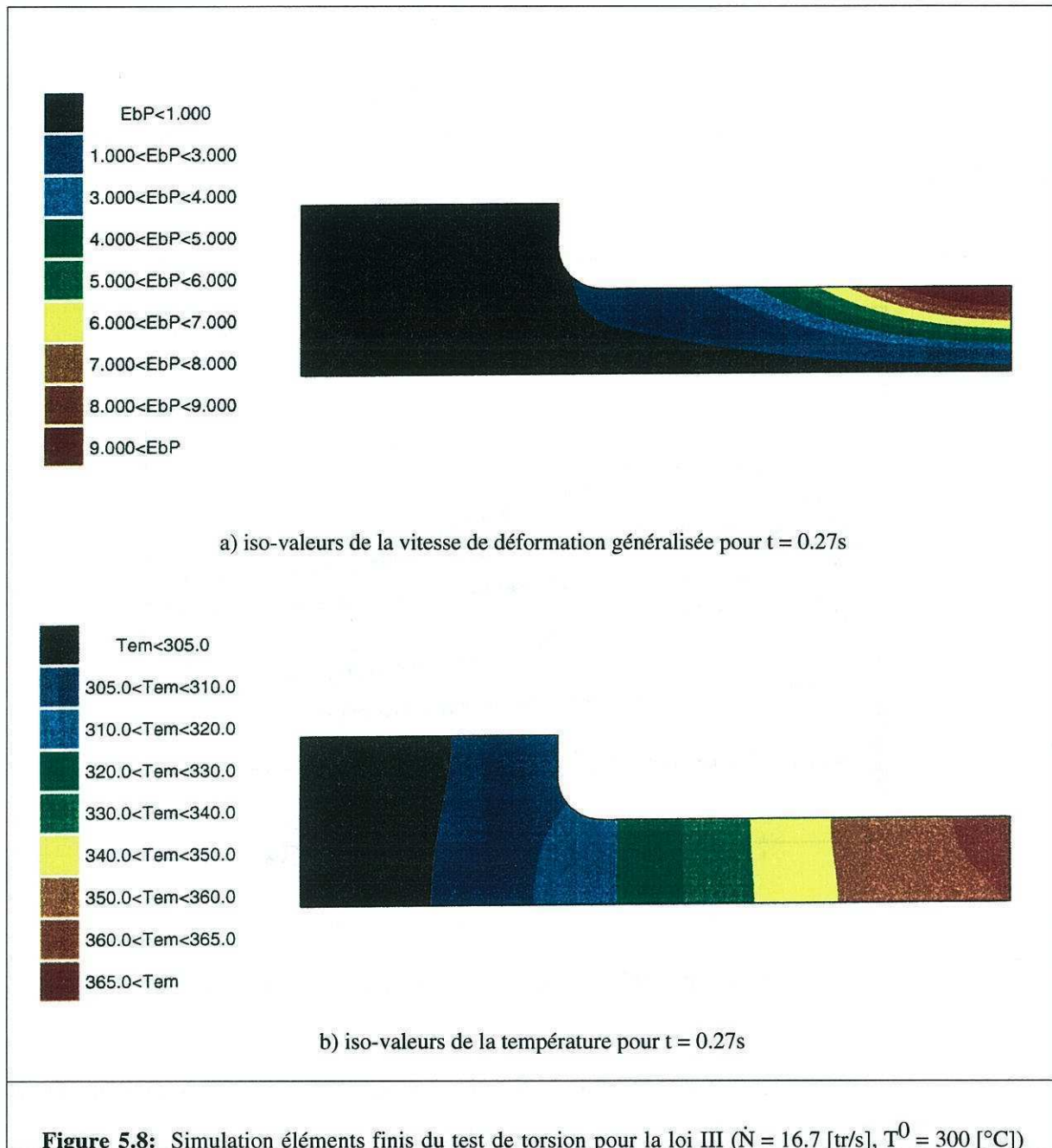


Figure 5.7: Comparaison calcul-expérience pour les modèles rhéologiques II et III

L'influence de l'adoucissement est bien mise en évidence par la forte localisation de la déformation dans la partie centrale de l'éprouvette (Figure 5.8a) et par un changement significatif de la distribution de température (Figure 5.8b). En comparaison avec les résultats de simulation obtenus avec la loi classique (Figure 5.6 a et b), on constate que, si on utilise la loi III, on obtient une localisation plus accentuée, ce qui peut mieux expliquer l'amorçage de la rupture dans la région centrale de l'éprouvette. Ceci permet de souligner l'importance d'une formulation adéquate et précise de la loi de comportement afin d'améliorer le caractère prédictif de la simulation.



Pour un alliage d'aluminium, on définit souvent la partie d'écrouissage par une expression de type loi de Voce (relation (1.36), chapitre 1), permettant une meilleure description de la compétition entre le phénomène de durcissement et le phénomène de restauration. C'est pourquoi on a identifié un modèle rhéologique intégrant ce type de formulation (Loi IV). La confrontation entre le calcul et l'expérience est reportée sur la Figure 5.9. En comparaison avec le modèle précédent (Loi III) on constate une faible diminution de l'écart moyen entre le calcul et l'expérience (de 4.9% à 4.4%), mais l'amélioration est significative en ce qui concerne les courbes b, c et d.

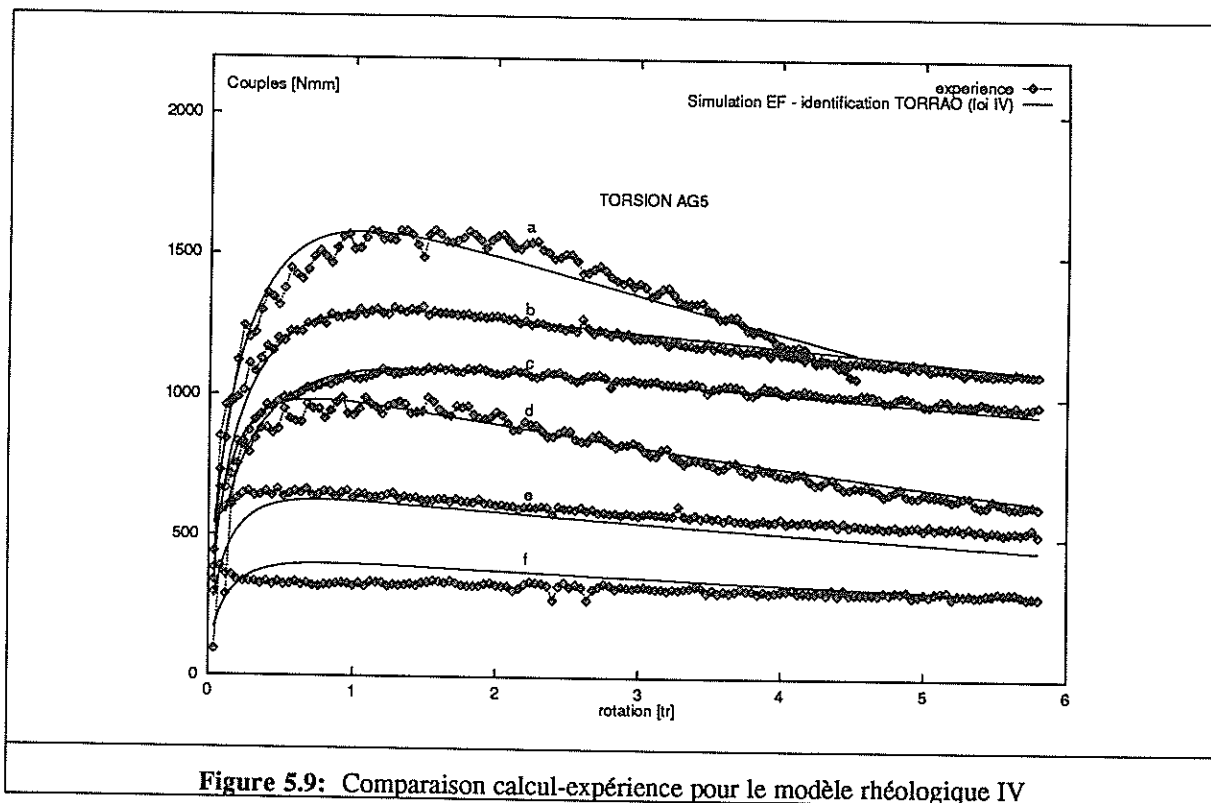


Figure 5.9: Comparaison calcul-expérience pour le modèle rhéologique IV

On pourrait encore améliorer la définition du comportement, en introduisant, par exemple, l'influence de la vitesse de déformation sur le coefficient d'écrouissage n et d'adoucissement r , car on observe des variations spécifiques au début des courbes de torsion correspondant aux petites vitesses et aux valeurs élevées de la température initiale (les courbes e et f).

4. ALLIAGE DE TITANE: TA6V

Pour l'étude du comportement d'un alliage de titane (TA6V) on a utilisé des courbes de torsion obtenues à partir des conditions opératoires reportées dans le Tableau 5.7.

Tableau 5.7: Conditions opératoires définissant le test de torsion d'un alliage de titane (TA6V) pour une éprouvette ayant les dimensions suivantes: $L = 51$ mm, $D = 9$ mm, $l = 35$ mm, $d = 6$ mm.

Conditions expérimentales	a	b	c	d
Vitesse de rotation [tr/s]	3.	0.3	3.	0.3
Température initiale [°C]	800	800	900	900

Le Tableau 5.8 synthétise l'expression des lois proposées pour l'identification.

Tableau 5.8: Les formes analytiques des fonction rhéologiques choisies pour l'identification.

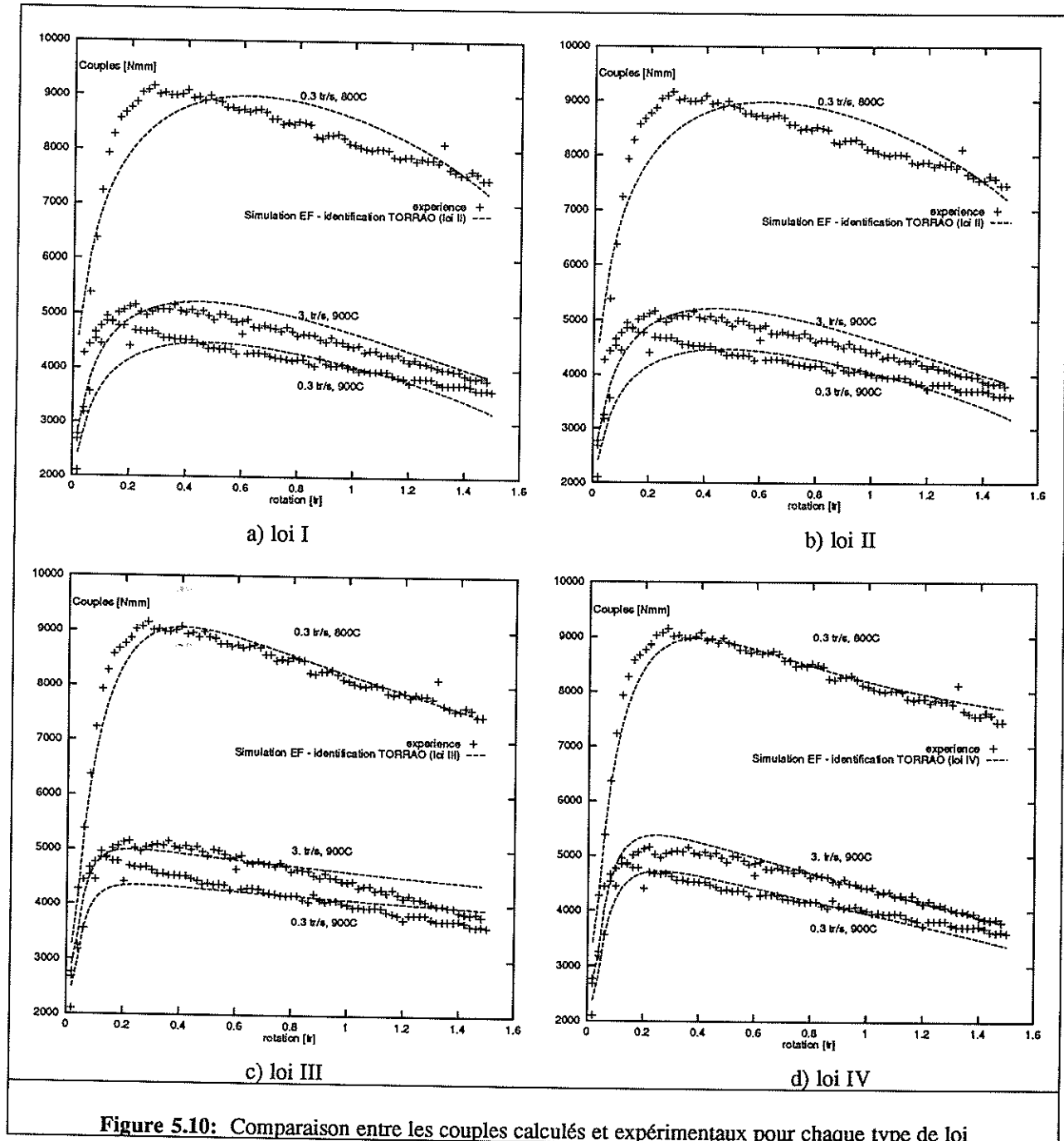
Loi	K_{ecr}	W	m	Paramètres P
I	$K_0(\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	0.	m_0	$\{K_0, n, \beta, m_0\}$
II	$K_0(\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}_0)^n \exp(\frac{\beta}{T})$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$ $r = r_0 + r_1 T$	$m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r_0, r_1, \beta, m_0, m_1\}$
III	$K_0 \sqrt{1 - \exp[-n(\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}_0)]} \exp(\frac{\beta}{T})$	0.	$m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n, r_0, r_1, \beta, m_0, m_1\}$
IV	$K_0 \sqrt{1 - \exp[-n(\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}_0)]} \exp(\frac{\beta}{T})$ $n = n_0 + n_1 T$	$1 - \exp(-r\bar{\epsilon})$ $r = r_0 + r_1 T$	$m_0 + m_1 T$	$\{K_0, n_0, n_1, r_0, r_1, \beta, m_0, m_1\}$

Les deux premières supposent un fort écrouissage du matériau et décrivent la dépendance par rapport à la déformation équivalente à l'aide d'une expression de type Krupkowski. Les dernières lois reposent sur la description de la compétition entre l'écrouissage et la restauration par une expression de Voce. Dans chaque cas, on détermine les valeurs des paramètres rhéologiques par la méthode d'identification avec un calcul par éléments finis (Tableau 5.9). Les coefficients thermiques utilisés pour quantifier l'auto-échauffement ont les valeurs suivantes: $k = 67$ [W/mK] et $c = 540$ [J/KgK] .

 Tableau 5.9: Résultats d'identification obtenus avec TORRAO pour chaque modèle rhéologique ($4 \leq$ nombre des paramètres ≤ 8).

	Valeurs Initiales	Valeurs Identifiées		Valeurs Initiales	Valeurs Identifiées	
Loi		I	II		III	IV
Itérations		10	19		11	20
Q [%]	24.3	8.9	5.5	27.3	6.1	3.3
$K_1 \times 10^2$	10.	1.4 ± 0.4	21.5 ± 6.8	0.1	1.280 ± 0.085	3.222 ± 0.900
n_0	0.1	0.132 ± 0.014	0.230 ± 0.012	10.	40.040 ± 2.176	-314.87 ± 66.28
n_1	0.	0.	0.	0.	0.	0.323 ± 0.061
r_0	0.	0.	-10.61 ± 1.45	0.	0.	-11.552 ± 1.36
r_1	0.	0.	0.011 ± 0.001	0.	0.	0.0104 ± 0.001
β	8000.	$10581. \pm 344.3$	7952.1 ± 361.9	8000.	10412 ± 690.9	9443.93
m_0	0.1	0.078 ± 0.010	0.193 ± 0.020	0.1	0.333 ± 0.121	0.358 ± 0.09
$m_1 \times 10^3$	0.	0.	-0.104 ± 0.010	0.	-0.228 ± 0.021	-0.254 ± 0.08

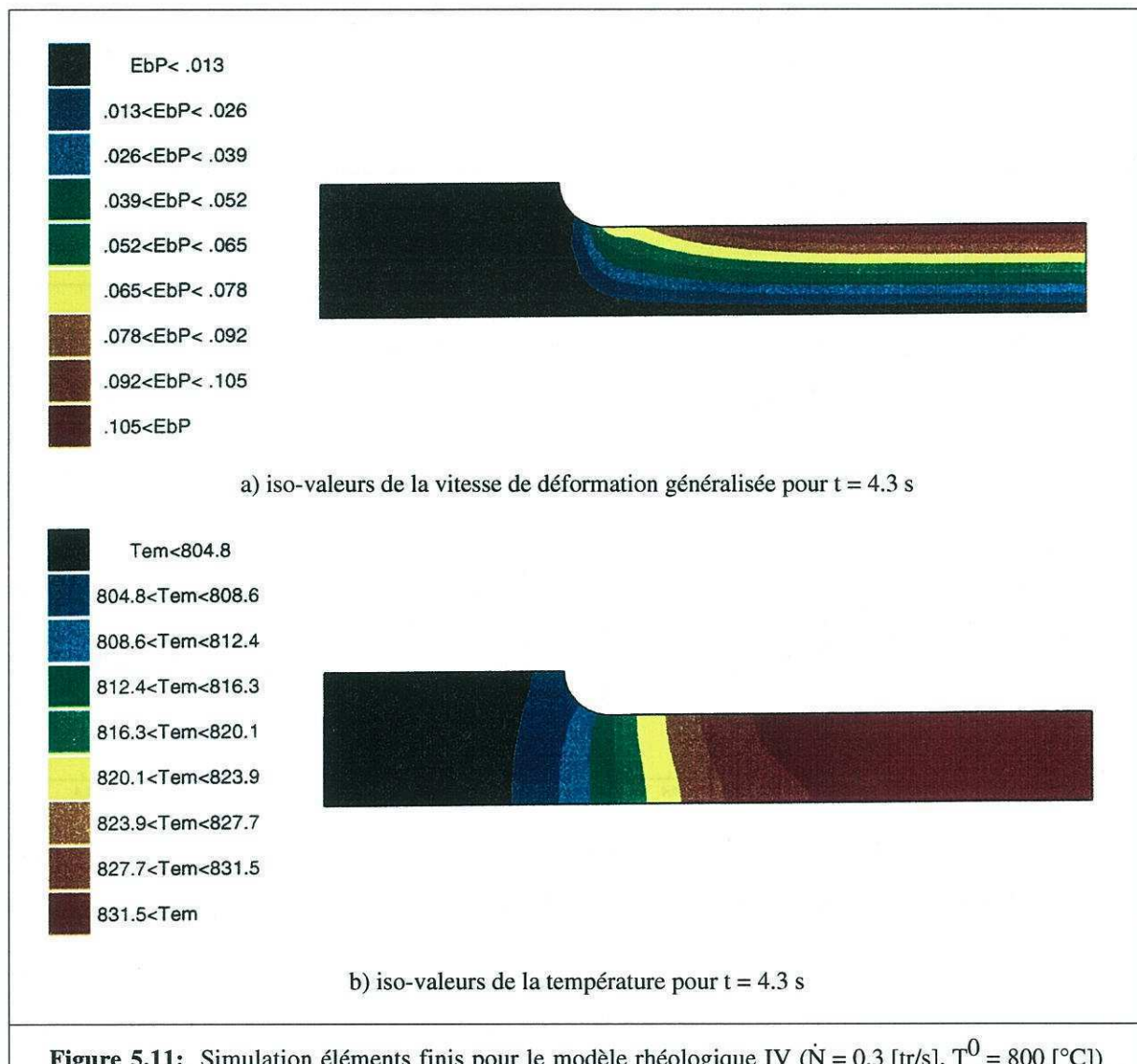
Partant d'une analyse quantitative de la fonction coût, on constate que la catégorie de lois utilisant un écoulement de Voce permet l'obtention d'une valeur plus faible de l'écart, de l'ordre de 3%. Pour mieux mettre en évidence la qualité des lois étudiées, on utilise la confrontation graphique entre les courbes expérimentales et les courbes calculées (Figure 5.10).



Ainsi, pour la loi I (Figure 5.10 a) on observe un désaccord important entre l'allure des courbes, surtout pour la température initiale la plus élevée (900 [°C]), car dans ce cas

l'autoéchauffement est plus faible et l'adoucissement dû à la croissance de la température est fortement diminué. L'introduction du terme d'adoucissement en fonction de la déformation équivalente (Loi II - Figure 5.10 b), conduit à une allure plus adéquate, mais encore non satisfaisante. Avec la loi III (Figure 5.10 c) on change l'allure des courbes, car la formulation de l'écrouissage par une loi de Voce permet une augmentation plus rapide des valeurs du couple au début de la déformation.

Enfin, si on ajoute le terme d'adoucissement, avec une thermo-dépendance linéaire du coefficient r et si on définit une variation linéaire du coefficient d'écrouissage n avec la température (Loi IV - Figure 5.10 d), la confrontation donne un très bon accord. Dans ce dernier cas, la simulation éléments finis montre une importante localisation de la déformation (Figure 5.11 a) et une distribution complexe de la température (Figure 5.11 b). Il serait donc impossible d'identifier les coefficients d'une telle loi en utilisant des méthodes classiques d'analyse du test de torsion.



5. POLYMÈRES SOLIDES

Pour définir les expressions des fonctions rhéologiques intervenant dans la description d'une loi de comportement applicable aux polymères solides, on part d'une synthèse bibliographique concernant l'étude phénoménologique d'une courbe contrainte-déformation pour des polymères [TILLIER, 1995].

Ainsi, dans le Tableau 5.10 on présente les expressions analytiques choisies pour décrire la variation de la contrainte en fonction de la déformation équivalente, de la vitesse de déformation généralisée et de la température (formule 5.2).

Tableau 5.10: Définition des fonctions rhéologiques correspondant à une loi de type G'Sell

K_{ve}	K_{cr}	K_{dr}	K_T	m	Paramètres P
$1 - \exp(-w\bar{\epsilon})$	$1 + c \exp(-d\bar{\epsilon})$	$\exp(h\bar{\epsilon}^n)$	$K_0 \exp(\frac{a}{T})$	m_0	$\{K_0, w, c, d, h, n, \beta, m_0\}$

On a donc besoin d'identifier 8 paramètres, ici représentés par: K_0 (la consistance de référence), w (le coefficient viscoélastique), c, d (définissant le crochet du contrainte), h (le coefficient du durcissement structural), n (le coefficient de sensibilité à la déformation), a (le coefficient de thermo-dépendance) et m_0 (le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation). La base des données expérimentales nécessaires pour l'identification de ces coefficients rhéologiques a été construite grâce aux essais de torsion et de traction réalisés au CEMEF sur un polycarbonate et sur un polyéthylène ([TILLIER, 1995]).

5.1 POLYCARBONATE

On utilise comme grandeurs expérimentales, les valeurs des couples de torsion obtenues par des essais à température ambiante et pour trois vitesses de rotation différentes (Tableau 5.11).

Tableau 5.11: Conditions opératoires définissant le test de torsion d'un polycarbonate, pour une éprouvette normalisée ($L = 30$ mm, $D = 12$ mm, $l = 15$ mm, $d = 10$ mm)

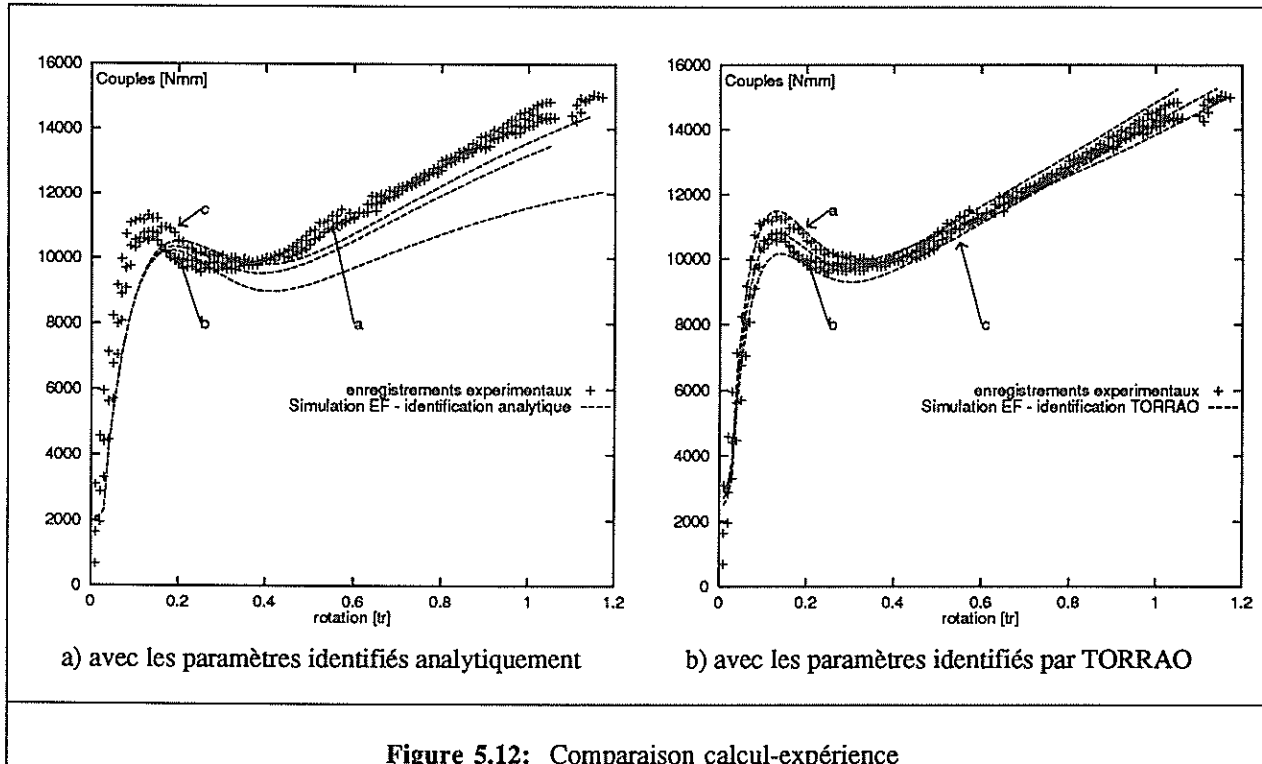
Conditions expérimentales	a	b	c
Vitesse de rotation [tr/s]	0.8×10^{-2}	0.8×10^{-3}	0.8×10^{-4}
Température initiale [°C]	22	22	22

Le Tableau 5.12 regroupe les paramètres obtenus à l'aide du logiciel d'identification par éléments finis (TORRAO) comparés à ceux obtenus avec une méthode analytique classique.

Tableau 5.12: Identification des paramètres pour un polycarbonate à partir du test de torsion (8 paramètres)

Paramètres	Identification		
	Valeurs initiales	Analytique	Éléments Finis
K_0	5.8	8.07	4.502 ± 0.166
w	1.	0.84	3.505 ± 0.485
c	10.	9.28	7.395 ± 0.589
d	10.	9.60	13.470 ± 0.373
h	0.	-0.0750	0.328 ± 0.05
n	2.	2.	2.
a	774.	774.	774.
m_0	0.001	0.002	0.033 ± 0.002
écart	-	11.60%	2.8%
itérations	-	6	7

Les comparaisons entre les couples expérimentaux et les couples calculés avec les paramètres identifiés analytiquement et par TORRAO sont reportées sur la Figure 5.12.

**Figure 5.12:** Comparaison calcul-expérience

L'écart calcul-expérience mesuré par la fonction coût est plus grand avec une identification classique qu'avec la méthode proposée. Ceci s'explique en partie par le fait que l'identification par éléments finis utilise la simulation du test de torsion dans des conditions réelles: prise en compte de l'autoéchauffement, dont de la conductivité ($k = 0.2 \text{ [W/mK]}$), de la chaleur massique ($c = 1170 \text{ [J/KgK]}$), de la conduction avec les mors ($h_{cd} = 1000 \text{ [W/m}^2\text{K]}$), de la convection ($h_{cv} = 17.9 \text{ [W/m}^2\text{K]}$) et de l'émissivité sur la surface libre ($\epsilon = 0.15$), ainsi que de la géométrie complète de l'éprouvette. De ce point de vue l'identification classique est trop approximative, car elle n'identifie le comportement que sur la partie utile et utilise des approximations pour les phénomènes thermiques.

5.2 POLYÉTHYLÈNE

Pour le polyéthylène, des essais de traction uniaxiale ont été réalisés dans les conditions décrites dans le Tableau 5.13.

Tableau 5.13: Conditions opératoires définissant le test de torsion d'un polycarbonate, pour une éprouvette en sablier ($L = 60 \text{ mm}$, $D = 12 \text{ mm}$, $\rho = 20 \text{ mm}$, $d = 6 \text{ mm}$)

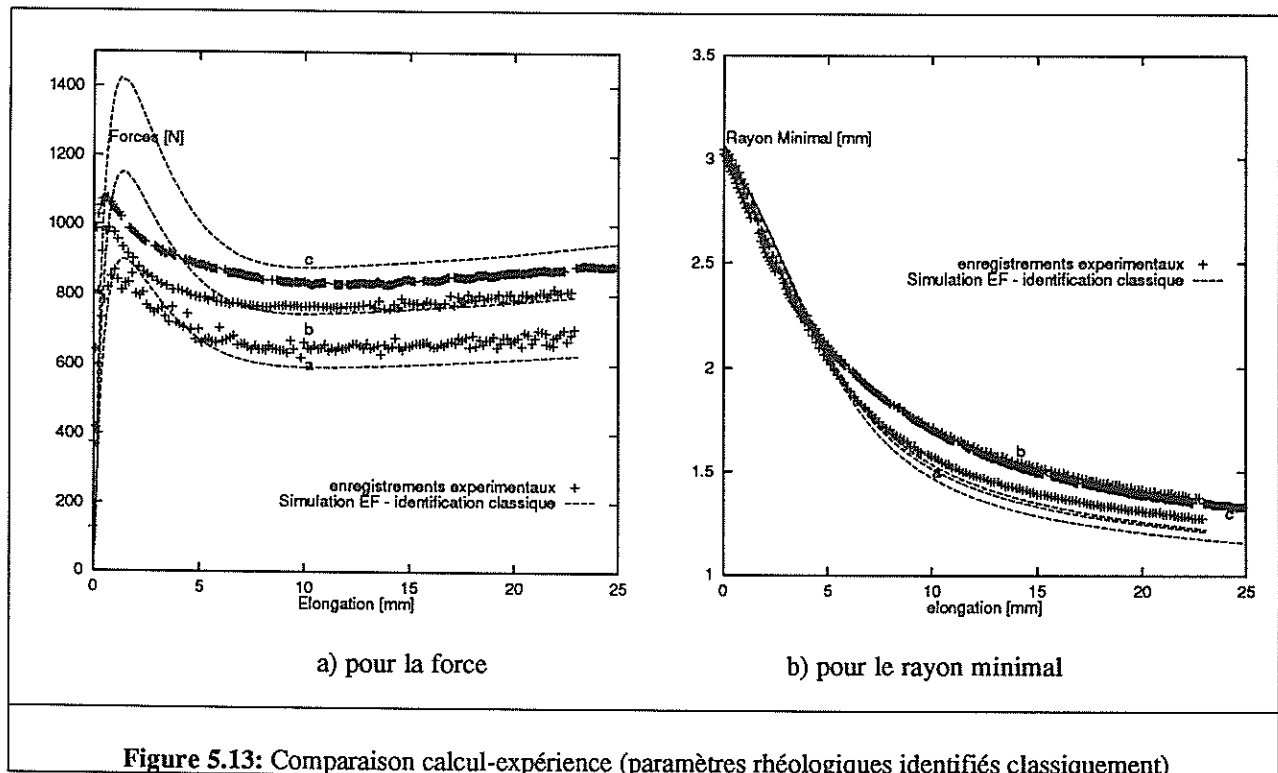
Conditions expérimentales	a	b	c
Vitesse de traction [mm/s]	0.834×10^{-2}	0.417×10^{-1}	0.162
Température initiale [°C]	23	23	23

La détermination classique des coefficients rhéologiques se fait à partir des mesures de forces et de l'évolution de la géométrie au niveau de la striction (le rayon minimal et le rayon de courbure correspondant). On calcule ainsi la contrainte équivalente, et, par une méthode de régression analytique, on cherche à déterminer les coefficients de la loi qui donnent la meilleure prédiction. Avec le logiciel d'identification éléments finis TRACTRAO on est capable d'identifier les paramètres, partant directement des mesures de la force ($\lambda = 0$, dans la formule (4.8)) et éventuellement du diamètre minimal ($\lambda = 1$). Le Tableau 5.14 donne les valeurs des coefficients obtenues par les deux approches.

On constate que le calcul éléments finis permet d'avoir une meilleure concordance avec l'expérience, la fonction coût étant plus faible que dans le cas d'un dépouillement classique. Pour mieux établir la qualité de l'identification on compare les valeurs des forces et des diamètres minimaux obtenues par des simulation éléments finis des essais de traction. Ainsi la Figure 5.13 montre que si on utilise les coefficients rhéologiques déterminés par une méthode classique de dépouillement, il existe un grand désaccord entre les courbes expérimentales et celles calculées par éléments finis.

Tableau 5.14: Identification des paramètres pour un polyéthylène à partir du test de traction (6 paramètres)

Paramètres	Identification			
	Valeurs initiales	Classique	Éléments Finis Q simple ($\lambda = 0$)	Éléments Finis Q mixte ($\lambda = 1$)
$K_0[\text{MPas}^m]$	10.	11.014	6.031 ± 0.081	6.039 ± 0.139
w	30.	30.786	286.530 ± 21.960	322.058 ± 37.578
c	0.	0.	0.	0.
d	0.	0.	0.	0.
h	0.5	0.5151	0.896 ± 0.012	1.001 ± 0.023
n	2.	2.	1.255 ± 0.016	1.215 ± 0.031
a [K]	466.	466.	466.	466.
m_0	0.1	0.156	0.103 ± 0.002	0.121 ± 0.003
écart moyenne ($\epsilon_F, \epsilon_{dmin}$)	24.7%	11% (13.6%, 9.3%)	5.5% (2.9%, 9.2%)	4.6% (4.7%, 4.4%)
itérations	-	12	15	12



Par contre, en utilisant les paramètres identifiés avec TRACTRAO à partir des mesures sur la force, l'accord entre l'expérience et le calcul de simulation est sensiblement amélioré (Figure 5.14).

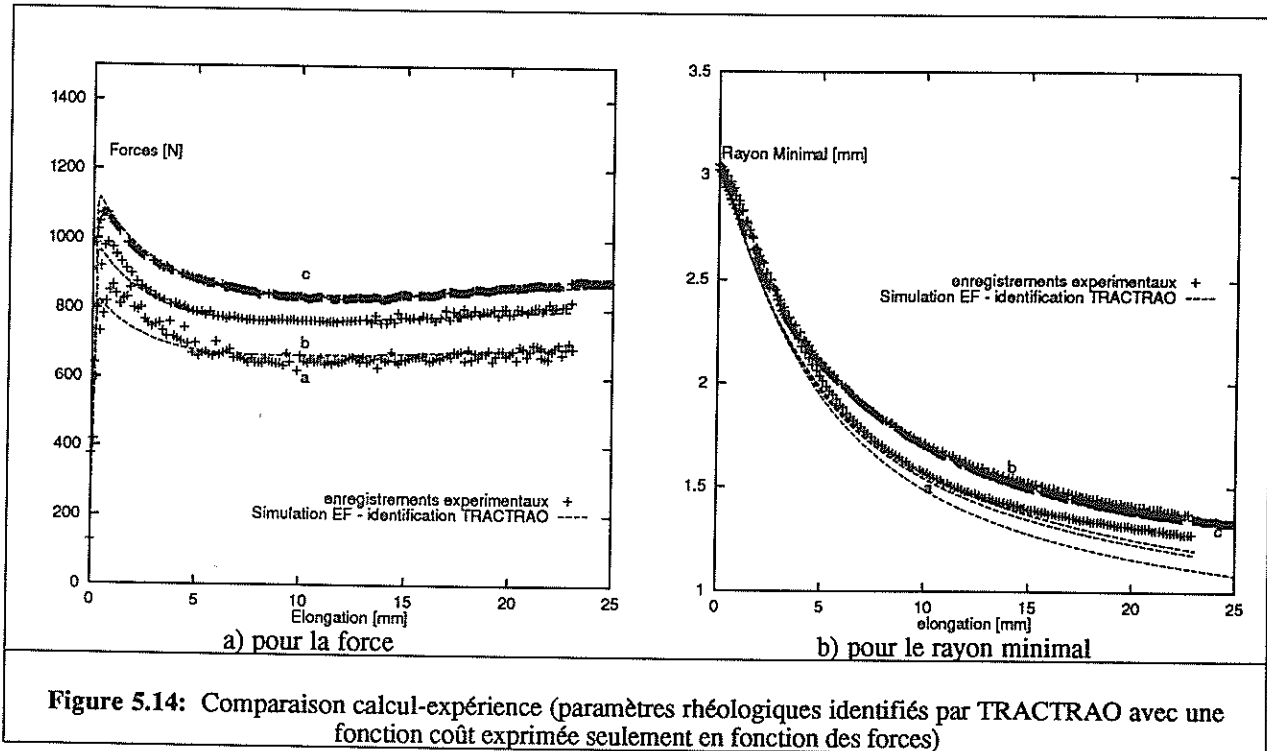


Figure 5.14: Comparaison calcul-expérience (paramètres rhéologiques identifiés par TRACTRAO avec une fonction coût exprimée seulement en fonction des forces)

Ainsi, en ce qui concerne la prédiction des forces (Figure 5.14 a), on constate une très bonne concordance avec l'expérience (écart de l'ordre de $\approx 2.9\%$). Ceci permet de dire que l'identification d'un comportement isotrope de type Norton-Hoff peut se faire seulement à partir des mesures de la force. Par contre, en ce qui concerne les prédictions des valeurs des rayons minimaux (Figure 5.14 b), on voit bien qu'elles sont moins satisfaisantes (écart de l'ordre de $\approx 9.2\%$).

Pour pouvoir expliquer ces résultats, on cherche à identifier les coefficients de la loi proposée en utilisant cette fois-ci une fonction coût mixte, exprimée simultanément en fonction des forces et des rayons de striction. La Figure 5.15 donne la confrontation entre l'expérience et le calcul de simulation. Cette fois on constate une diminution importante de l'écart sur le diamètre minimal (passant de 9.2% à 4.4%) et une faible augmentation de l'écart sur les valeurs des forces (de 2.9% à 4.7%).

De plus, les valeurs des paramètres rhéologiques sont assez différentes (Tableau 5.14), surtout en ce qui concerne le coefficient de visco-élasticité w (variation de 12.4%), le coefficient de durcissement structural h (variation de 11.7%) et la sensibilité à la vitesse de déformation m_0 (variation de 17%).

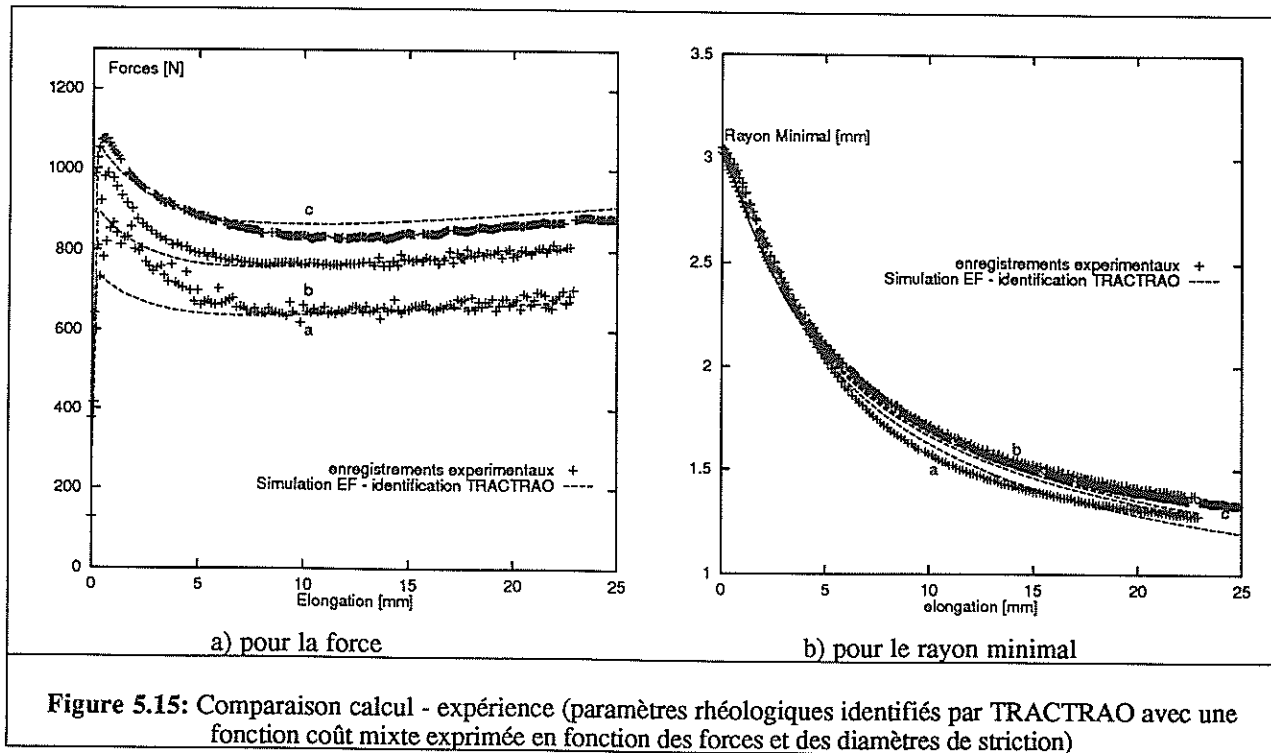


Figure 5.15: Comparaison calcul - expérience (paramètres rhéologiques identifiés par TRACTRAO avec une fonction coût mixte exprimée en fonction des forces et des diamètres de striction)

Au vu de ces résultats on peut mettre en cause l'existence de problèmes liés à l'acquisition expérimentale, soit en ce qui concerne la force, soit en ce qui concerne les mesures géométriques. D'autre part, des influences plus fines, liées à l'évolution de la structure, qui n'est pas prise en compte dans notre approche, peuvent exister.

6. CONCLUSIONS

Les résultats présentés montrent d'abord la faisabilité du logiciel d'identification en ce qui concerne l'estimation automatique et simultanée de tous les coefficients rhéologiques (au moins 8 testés jusqu'à maintenant) intervenant dans la description analytique d'une loi de comportement thermo-viscoplastique. L'analyse de la simulation éléments finis nous a permis également de mettre en évidence l'importance de la loi de comportement en ce qui concerne l'évolution et la distribution de la déformation et de la température pendant l'essai rhéologique. De plus, en utilisant des identifications successives sur plusieurs formulations des fonctions rhéologiques, il est possible de trouver la loi qui permet d'avoir une meilleure prédiction des grandeurs observables et donc une description plus correcte de l'écoulement.

Par rapport aux méthodes de dépouillement classiques, on souligne la capacité du logiciel d'identification éléments finis à analyser des lois plus complexes, sans modifications essentielles en ce qui concerne la modélisation du test rhéologique. Ainsi il suffit d'introduire les nouvelles expressions analytiques de la loi et ses dérivées par rapport aux paramètres utilisés. Les valeurs des coefficients rhéologiques seront ensuite automatiquement identifiées.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Nous avons présenté dans cette étude une procédure d'identification automatique de paramètres de comportement en utilisant l'analyse inverse d'un modèle de simulation par éléments finis des tests rhéologiques. Par une résolution plus précise du couplage thermo-mécanique, cette méthode permet de prendre en compte la complexité de l'écoulement plastique pendant un essai rhéologique. Il est possible, en particulier, d'analyser des lois de comportement isotropes de type thermo-viscoplastiques, dans des conditions d'essai sévères, principalement caractérisées par des phénomènes liés à un fort auto-échauffement et à une importante localisation de la déformation. On est ainsi capable d'identifier simultanément et automatiquement tous les paramètres intervenant dans la formulation des lois constitutives permettant d'exprimer la compétition existant entre le phénomène d'écrouissage et d'adoucissement.

Il est aussi important de remarquer la flexibilité de l'approche proposée, notamment en ce qui concerne la possibilité d'implémenter de nouvelles dépendances en fonction de la déformation, de la température, et même en fonction de la vitesse de déformation. Ceci augmente ainsi la généralité du code. Il faut également souligner son caractère évolutif car, parallèlement à une amélioration ou à une extension de la modélisation numérique (par exemple par l'introduction de l'anisotropie ou des phénomènes liés à l'évolution de la microstructure), on peut obtenir les données rhéologiques correspondant aux exigences de la simulation.

D'un point de vue purement numérique, le point essentiel de cette approche est l'évaluation de la matrice de sensibilité paramétrique par la différentiation directe des équations fondamentales définissant l'équilibre mécanique et thermique. Le calcul de simulation est ainsi enrichi avec un module de calcul nodal de sensibilité, permettant de quantifier l'influence de chaque paramètre rhéologique sur toutes les variables définissant le modèle direct (déformation équivalente, température, contrainte) et notamment sur les grandeurs observables (couples, forces, diamètres de striction) intervenant dans la formulation de la fonction coût. Ceci se révèle important pour le calcul itératif de minimisation, surtout en ce qui concerne le temps et la précision de calcul du gradient de la fonction coût.

La faisabilité de la méthodologie développée a été montrée par des analyses numériques concernant la convergence, la stabilité et la validité du calcul d'identification dans le cas du test

de torsion, de traction et de traction-torsion. Nous avons également montré la possibilité d'identifier le comportement à partir de plusieurs types de mesure, en utilisant des fonctions multi-objectifs. Enfin, les applications sur des données expérimentales réelles montrent bien l'utilité de ces logiciels d'identification dans le domaine de la recherche sur le comportement rhéologique des matériaux.

Pour le développement futur de ce travail on envisage plusieurs directions d'amélioration et d'approfondissement.

Tout d'abord au niveau de la simulation des essais rhéologiques, on propose:

- une modélisation plus précise des conditions thermiques, notamment lorsqu'il s'agit d'un pilotage spécifique concernant le régime thermique (gradient thermique initial, conditions aux limites variables au cours du temps).

- l'introduction de l'élasticité, de l'anisotropie et des lois à plusieurs variables internes, définies par des équation cinétiques. Il sera ainsi possible de quantifier l'influence de l'évolution de la microstructure sur les phénomènes de restauration et de recristallisation dynamique.

- l'utilisation d'une méthode de résolution de l'équilibre mécanique à partir d'une formulation mixte en vitesse et pression. On cite par exemple l'algorithme d'Uzawa qui rend plus précise la condition d'incompressibilité et qui permet une évaluation des sensibilités des contraintes plus précise et moins coûteuse en temps de calcul.

- pour les cas nécessitant plusieurs remaillages, il est nécessaire de tester différentes méthodes de transport des variables, notamment en ce qui concerne les dérivées paramétriques des variables géométriques, afin d'aboutir à une meilleure précision du calcul de ces dérivées. Il est possible d'envisager ici l'adaptation de la procédure de remaillage pour une simulation intégrant un calcul de sensibilité.

Puis au niveau de l'identification on envisage:

- l'étude des lois de comportement en utilisant le test de compression.

- l'amélioration du module d'optimisation, afin de diminuer le nombre de simulations nécessaires pour la recherche des valeurs des paramètres.

- la recherche de l'espace expérimental optimal qui conduit à une diminution importante de l'effort de calcul d'identification. Il faut chercher à définir plus systématiquement les courbes expérimentales (nombre de conditions opératoires et nombre de points par courbes), partant des informations données par la matrice de sensibilité.

- l'adaptation au calcul parallèle. Dans ce cas il est possible de diviser le temps de calcul par le nombre de courbes expérimentales, car chaque expérience peut être simulée de façon indépendante. Une version existe et a déjà été testée sur des cas simples.

En ce qui concerne les perspectives ouvertes par ce travail on souligne principalement la possibilité d'appliquer le principe d'identification pour des essais caractéristiques de la rhéologie des matériaux à l'état semi-solide. Le développement d'une approche de type inverse ouvre, dans ce cas, une voie prometteuse dans la compréhension des milieux hétérogènes.

Dans un futur proche on envisage également la possibilité de développer sur le même principe, l'identification des paramètres tribologiques et dans un avenir plus lointain, pourquoi pas l'identification des lois pour un couplage microstructural.

ANNEXE 1

CONDITION DE CONTINUITÉ DE LA DERIVÉE DE LA CONSISTANCE PAR RAPPORT À LA DÉFORMATION

Soit la définition de la consistance sous la forme suivante:

$$\begin{cases} K(P, \bar{\varepsilon}, T) = K_{ecr} [1-W] + K_{sat} W \\ K_{ecr} = K_{ecr}(P, \bar{\varepsilon}, T) \\ W = W(P, \bar{\varepsilon}, T) \\ K_{sat} = K_{sat}(P, T) \end{cases}$$

où la fraction recristallisée W s'exprime généralement par:

$$W = \begin{cases} 0, \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_r \\ W(P, \bar{\varepsilon}, T), \bar{\varepsilon} > \bar{\varepsilon}_r \end{cases}$$

Donc l'expression de la consistance s'écrit:

$$K = \begin{cases} K_{ecr}, \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_r \\ K_{ecr} [1-W] + K_{sat} W, \bar{\varepsilon} > \bar{\varepsilon}_r \end{cases}$$

L'égalité de la dérivée à gauche et à droite dans le point $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$ implique:

$$\frac{dK_{ecr}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{dK_{ecr}}{d\bar{\varepsilon}} (1-W) + \frac{dW}{d\bar{\varepsilon}} [K_{sat} - K_{ecr}] + \frac{dK_{sat}}{d\bar{\varepsilon}} W \text{ pour } \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$$

Si on tient compte du fait que pour $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$ on a $W = 0$, on obtient:

$$\frac{dK_{ecr}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{dK_{ecr}}{d\bar{\varepsilon}} + \frac{dW}{d\bar{\varepsilon}} [K_{sat} - K_{ecr}] \text{ pour } \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$$

Pour respecter cette condition, il suffit d'avoir $\frac{dW}{d\bar{\varepsilon}} = 0$ en $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r$ (relation valable si on choisit $s > 1$ dans (1.50)), ou, dans le cas contraire, de choisir $K_{sat}(P, T) = K_{ecr}(P, \bar{\varepsilon}_r, T)$.

ANNEXE 2

CONVERGENCE VERS 0 DU COEFFICIENT DE TYPE LEVENBERG-MARQUARDT

Comme la matrice $[\gamma]$ est diagonale on peut écrire que:

$$\delta' = \frac{[grad(Q)] [\gamma] [grad(Q)]^T}{\sqrt{Q}} \leq \max(\gamma_{ii}) \cdot \frac{\|gradQ\|^2}{Q} \sqrt{Q}$$

Si le minimum de la fonction coût Q_{min} est différent de 0, on vérifie simplement que pour $Q \rightarrow Q_{min}$ on a $gradQ \rightarrow 0$ et donc $\delta' \rightarrow 0$. Il reste à analyser le cas correspondant au minimum global $Q_{min} = 0$. Ainsi pour avoir $\delta' \rightarrow 0$ quand $Q \rightarrow 0$ il suffit de montrer qu'il existe un $L > 0$ tel que $\frac{\|gradQ\|^2}{Q} \leq L$ pour tous les paramètres P qui se trouvent au voisinage des valeurs \bar{P} correspondant au minimum global ($Q(\bar{P}) = 0$).

On sait qu'autour du point minimal, la fonction coût doit être convexe. Si la matrice des dérivées secondes $[\frac{\partial^2 Q}{\partial P_i \partial P_j}]$ est bien conditionnée, la convexité implique qu'elle doit être définie positive. On exprime alors la partie quadratique du développement de la fonction Q en série de Taylor dans l'espace des directions principales de la matrice $[\frac{\partial^2 Q}{\partial P_i \partial P_j}]$. Ainsi, au voisinage du minimum, on peut écrire:

$$Q(P) = \lambda_1(P'_1 - \bar{P}'_1)^2 + \lambda_2(P'_2 - \bar{P}'_2)^2 + \dots + \lambda_n(P'_n - \bar{P}'_n)^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)$$

où P' représentent le vecteur des paramètres correspondant à l'espace des directions principales ($P' = MP$, M étant la matrice de transformation), et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ représentent les valeurs propres ($0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$). On peut alors exprimer le gradient par:

$$\frac{dQ}{dP_i} = \sum_{j=1}^n \frac{dQ}{dP'_j} \frac{dP'_j}{dP_i} = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j (P'_j - \bar{P}'_j) \alpha_{ij} + \|\Delta P'\| O(\|\Delta P'\|), \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{où } \alpha_{ij} = \frac{dP'_j}{dP_i}.$$

Ainsi on obtient:

$$\|grad Q\|^2 = 4 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j (P'_j - \bar{P}_j) \alpha_{ij} \right]^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)$$

Si on tient compte que:

$$\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j (P'_j - \bar{P}_j) \alpha_{ij} \right]^2 \leq \sum_{j=1}^n (P'_j - \bar{P}_j)^2 \sum_{j=1}^n [\lambda_j \alpha_{ij}]^2$$

on peut écrire:

$$\|grad Q\|^2 \leq 4M \|\Delta P'\|^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)$$

$$\text{où } M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\lambda_j \alpha_{ij}]^2.$$

Finalement, en utilisant que $Q \geq \lambda_{\min} \|\Delta P'\|^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)$ on a:

$$0 \leq \frac{\|grad Q\|^2}{Q} \leq \frac{4M \|\Delta P'\|^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)}{\lambda_{\min} \|\Delta P'\|^2 + \|\Delta P'\|^2 O(\|\Delta P'\|)} = \frac{4M + O(\|\Delta P'\|)}{\lambda_{\min} + O(\|\Delta P'\|)}$$

Lorsque $\Delta P \rightarrow 0$ on obtient $\Delta P' \rightarrow 0$ et donc pour $0 < \varepsilon < \lambda_{\min}$, il existe un $\delta > 0$ tels que $\forall P'$ respectant la condition $\|\Delta P'\| \leq \delta$ on a $-\varepsilon < O(\|\Delta P'\|) < \varepsilon$. Dans ce cas on obtient:

$$\frac{\|grad Q\|^2}{Q} \leq L = \frac{4M + \varepsilon}{\lambda_{\min} - \varepsilon}$$

Donc, partant de la relation qui définit δ' on obtient $\delta' \leq \max(\gamma_{ii}) L \sqrt{Q}$, ce qui permet de conclure que lorsque $Q \rightarrow 0$ on a $\delta' \rightarrow 0$.

ANNEXE 3

CONVEXITÉ DU POTENTIEL VISCOPLASTIQUE

Le potentiel φ est convexe si et seulement si la matrice des dérivées secondes D est définie positive. Si nous utilisons l'écriture du $\dot{\varepsilon}^{vp}$ dans le système des axes principaux, la matrice D s'écrit sous la forme:

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_i^{vp} \partial \dot{\varepsilon}_j^{vp}}, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3.$$

En utilisant la définition du tenseur déviateur des contraintes $s_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_i^{vp}} = f \dot{\varepsilon}_i^{vp}$ on obtient:

$$D_{ij} = \frac{\partial (f \dot{\varepsilon}_j^{vp})}{\partial \dot{\varepsilon}_i^{vp}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}_i^{vp}} \dot{\varepsilon}_j^{vp} + f \frac{\partial \dot{\varepsilon}_j^{vp}}{\partial \dot{\varepsilon}_i^{vp}} = \frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\dot{\varepsilon}_i^{vp} \dot{\varepsilon}_j^{vp}}{\dot{\varepsilon}} + f \delta_{ij}$$

On peut donc écrire:

$$D_{ij} = a \dot{\varepsilon}_i^{vp} \dot{\varepsilon}_j^{vp} + b \delta_{ij}$$

avec:

$$a = \frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{1}{\dot{\varepsilon}} \text{ et } b = f$$

Pour que la matrice D soit définie positive, il faut que toutes les valeurs propres λ soient positives. Partant de la définition des vecteurs propres V on obtient:

$$\sum_{j=1}^3 D_{ij} V_j = a \sum_{j=1}^3 \dot{\varepsilon}_i^{vp} \dot{\varepsilon}_j^{vp} V_j + b \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} V_j = \lambda V_i$$

Pour $V_j = \dot{\varepsilon}_j^{vp}$ on a:

$$a \dot{\varepsilon}_i^{vp} \sum_{j=1}^3 (\dot{\varepsilon}_j^{vp})^2 + b \dot{\varepsilon}_i^{vp} = \lambda_1 \dot{\varepsilon}_j^{vp}$$

et donc:

$$\lambda_1 = a \frac{3}{2} \dot{\bar{\epsilon}}^2 + b = \dot{\bar{\epsilon}} \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} + f = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda_1 > 0$ est $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} > 0$. On cherche maintenant les deux autres vecteurs propres orthogonaux à la direction $d = \{\dot{\bar{\epsilon}}_1^{vp}, \dot{\bar{\epsilon}}_2^{vp}, \dot{\bar{\epsilon}}_3^{vp}\}$. Ils doivent alors vérifier la relation:

$$\sum_{j=1}^3 \dot{\bar{\epsilon}}_j^{vp} V_j = 0$$

donc:

$$\sum_{j=1}^3 D_{ij} V_j = b V_i = \lambda V_i \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = b = f > 0$$

Ainsi les valeurs propres associées aux deux autres vecteurs propres sont positives. On peut donc conclure que la matrice D est définie positive si et seulement si la contrainte équivalente est une fonction croissante de $\dot{\bar{\epsilon}}$.

ANNEXE 4

DÉFINITION DES MATRICES JACOBINIENNES, DE VOLUME ET DE SURFACE

Le jacobien de volume J définissant le passage de l'espace de référence ξ à l'espace réel x s'exprime par:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice jacobienne s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{Nbnoe} R_n^2 \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & J_{12} &= \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{Nbnoe} R_n^2 \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ J_{21} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} Z_n \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & J_{22} &= \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} Z_n \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Ainsi on a:

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12}$$

Le jacobien de surface J^s s'exprime par:

$$J^s = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^s \\ J_2^s \end{bmatrix}$$

où:

$$J_1^s = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{Nbnoe} R_n^2 \frac{\partial N_n^s}{\partial \xi} \quad J_2^s = \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} Z_n \frac{\partial N_n^s}{\partial \xi}$$

Donc:

$$|J^s| = \sqrt{J_1^{s2} + J_2^{s2}}$$

ANNEXE 5

DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR TANGENT B

Par définition, l'opérateur B s'exprime par:

$$B_{ijln} = \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial V_{ln}}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3, n = 1, Nbnoe$$

où le vecteur de vitesses nodales V s'écrit pour chaque composante sous la forme:

$$V_{1n} = \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ \vdots \\ V_{rn} \end{bmatrix} \quad V_{2n} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad V_{3n} = \begin{bmatrix} V_{z1} \\ V_{z2} \\ \vdots \\ V_{zn} \end{bmatrix}$$

Le tenseur vitesse de déformation est défini par:

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ sym & \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ sym & sym & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r = \frac{\sum_{n=1}^{Nbnoe} V_{1n} R_n N_n}{r} \\ \omega = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_{2n} N_n \\ v_z = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_{3n} N_n \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\sum_{n=1}^{Nbnoe} R_n^2 N_n} \\ z = \sum_{n=1}^{Nbnoe} Z_n N_n \end{array} \right.$$

Ainsi le calcul des composantes d'opérateur B conduit à:

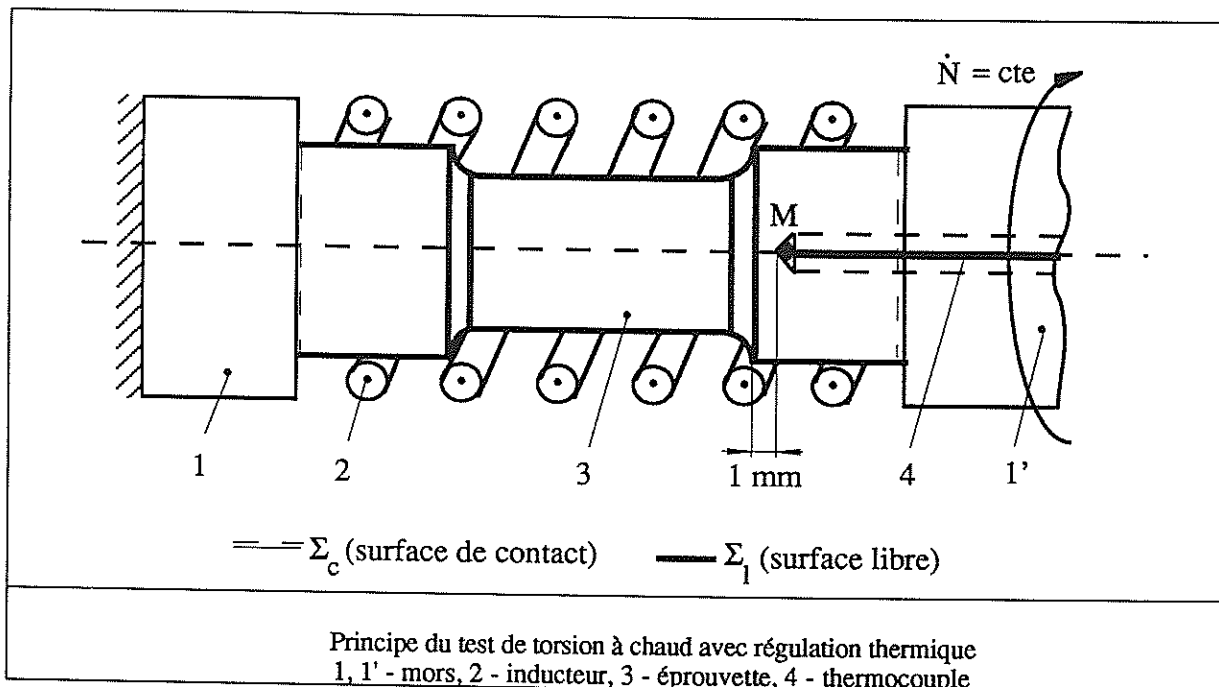
$$\begin{aligned}
 B_{111n} &= \frac{R_n}{r} \left[\frac{\partial N_n}{\partial r} - \frac{N_n}{r} \right] & B_{112n} &= 0 & B_{113n} &= 0 \\
 B_{121n} &= 0 & B_{122n} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial N_n}{\partial r} & B_{123n} &= 0 \\
 B_{131n} &= \frac{1}{2} \frac{R_n}{r} \frac{\partial N_n}{\partial z} & B_{132n} &= 0 & B_{133n} &= \frac{1}{2} \frac{\partial N_n}{\partial r} \\
 B_{221n} &= \frac{N_n R_n}{r^2} & B_{222n} &= 0 & B_{223n} &= 0 \\
 B_{231n} &= 0 & B_{232n} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial N_n}{\partial z} & B_{233n} &= 0 \\
 B_{331n} &= 0 & B_{332n} &= 0 & B_{333n} &= \frac{\partial N_n}{\partial z}
 \end{aligned}$$

La symétrie du tenseur de vitesses de déformation implique: $B_{jiln} = B_{ijln}$.

ANNEXE 6

CALCUL DU CHAMP DE TEMPÉRATURE DANS LE CAS D'UNE RÉGULATION THERMIQUE À L'AIDE D'UN CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Dans le cas des essais de torsion à chaud, pour éviter le refroidissement de l'éprouvette pendant la déformation et en vue d'assurer la température dans la pièce autour de la valeur désirée, T^0 , on utilise un système de régulation thermique. Le principe d'un tel système suppose un chauffage uniforme par induction permettant la compensation du flux de chaleur sortant (par convection avec l'air, par conduction avec les mors ou par émissivité) et l'obtention d'une distribution quasi-constante de la température dans l'éprouvette. Cette dernière condition est difficile à satisfaire, car théoriquement il nous faut un contrôle volumique de la température, en des points différents de l'éprouvette. En pratique on se limite à la mesure de la température seulement en un point M situé à 1mm de la section du congé. Ainsi l'inducteur est piloté automatiquement de telle façon que, au point considéré, la température reste égale à la température initiale de l'éprouvette ($T_M = T^0$).



Dans un première temps, la résolution d'équilibre thermique suppose que les conditions sont adiabatiques et donc l'échauffement de l'éprouvette est déterminé en tenant compte

seulement de l'énergie dissipée par la déformation plastique, de la conductivité et de la capacité calorifique du matériau testé. On considère ainsi que les échanges thermiques avec l'extérieur sont entièrement compensés par le flux, q , généré par induction. Cette résolution adiabatique est tout à fait pertinente lorsqu'il s'agit des essais rapides (durée très courte, de quelques secondes), mais elle devient de plus en plus approximative, pour des essais de long durée, car une surestimation de plus en plus importante de l'élévation de la température peut apparaître.

Pour aboutir à une modélisation de l'essai de torsion plus rigoureuse du point de vue thermique, il faut résoudre l'équation de la chaleur en tenant compte des conditions limites définissant le test réel. De plus on doit ajouter un flux q (uniformément distribué sur la surface extérieure de l'éprouvette), a priori inconnu, qui permet de conserver au point M la température initiale T^0 .

Dans ce cas l'équation de l'équilibre thermique s'écrit sous la forme:

trouver T et q tels que:

$$\rho c \frac{dT(x,t)}{dt} - \text{div}(k \text{grad} T(x,t)) - r \dot{w} = 0$$

et qui respectent les conditions limites suivantes:

$$\begin{cases} Q_{cd} = h_{cd}(T - T_{mors}) = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_c \text{ pour } x \in \Sigma_c \\ Q_{cv} + Q_r = (h_{cv} + h_r)(T - T_a) = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_l \text{ pour } x \in \Sigma_l \\ -q_e = -q = -k \cdot \text{grad}(T) \cdot n_l \text{ pour } x \in \Sigma_l \\ T(x, t=0) = T^0, T(x_M, t) = T^0 \end{cases}$$

Le schéma temporel et la discrétisation par éléments finis proposés dans le paragraphe 2.2.4 (chapitre 3), conduisent à la résolution du système suivant:

trouver T' et q' tels que:

$$\begin{cases} C' T'' + F'(q') = 0 \\ T''(x_M) = T^0 \end{cases}$$

Partant de la définition du terme libre F' , il est facile de constater que l'on peut écrire:

$$F'(q') = F'(q' = 0) - q' (\alpha_2 + 2\alpha_3) \int_{\Sigma_e} N dS$$

La linéarité de F' par rapport au flux q^t permet de conclure que la solution T' du système antérieur dépend linéairement de ce flux et par conséquent on a:

$$T' = T' (q^t = 0) + q^t \frac{dT'}{dq^t}$$

Le calcul de $\frac{dT'}{dq^t}$ se fait par la dérivation du système thermique et on obtient:

$$C' \frac{dT'}{dq^t} - (\alpha_2 + 2\alpha_3) \int_{\Sigma_e} NdS = 0$$

Maintenant, si on impose la condition supplémentaire sur la valeur de la température au point M, on peut déterminer le flux par la relation suivante:

$$q^t = \frac{T^0 - T' (x_M, q^t = 0)}{\frac{dT'}{dq^t} (x_M)}$$

Avec cette valeur de flux on calcule le champ thermique correspondant par:

$$T' = T' (q^t = 0) + \frac{T^0 - T' (x_M, q^t = 0)}{\frac{dT'}{dq^t} (x_M)} \frac{dT'}{dq^t}$$

ANNEXE 7

CALCUL DES DÉRIVÉES DE L'OPÉRATEUR B PAR RAPPORT AUX COORDONNÉES GÉOMÉTRIQUES

Pour déterminer les dérivées de l'opérateur B par rapport aux coordonnées géométriques nodales $X = \begin{bmatrix} R_n \\ Z_n \end{bmatrix}$, on part des relations établies dans l'Annexe 5.

Ainsi les dérivées $\frac{\partial B}{\partial R_n}$ sont définies par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{111n}}{\partial R_n} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{N_n R_n^2}{r^2} \right] \left[\frac{\partial N_n}{\partial r} - \frac{N_n}{r} \right] + \frac{N_n^2 R_n^2}{r^4} + \frac{R_n}{r} \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) & \frac{\partial B_{112n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{113n}}{\partial R_n} &= 0 \\ \frac{\partial B_{121n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{122n}}{\partial R_n} &= \frac{1}{2} \frac{N_n R_n}{r} \frac{\partial N_n}{\partial r} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) & \frac{\partial B_{123n}}{\partial R_n} &= 0 \\ \frac{\partial B_{131n}}{\partial R_n} &= \frac{1}{2r} \left[1 - \frac{N_n R_n^2}{r^2} \right] \frac{\partial N_n}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{R_n}{r} \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) & \frac{\partial B_{132n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{133n}}{\partial R_n} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial B_{221n}}{\partial R_n} &= \frac{N_n}{r^2} \left[1 - \frac{2N_n R_n^2}{r^2} \right] & \frac{\partial B_{222n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{223n}}{\partial R_n} &= 0 \\ \frac{\partial B_{231n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{232n}}{\partial R_n} &= \frac{1}{2} \frac{N_n R_n}{r} \frac{\partial N_n}{\partial z} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) & \frac{\partial B_{233n}}{\partial R_n} &= 0 \\ \frac{\partial B_{331n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{332n}}{\partial R_n} &= 0 & \frac{\partial B_{333n}}{\partial R_n} &= \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Pour les dérivées $\frac{\partial B}{\partial Z_n}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{111n}}{\partial Z_n} &= \frac{R_n}{r} \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) & \frac{\partial B_{112n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{113n}}{\partial Z_n} &= 0 \\ \frac{\partial B_{121n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{122n}}{\partial Z_n} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) & \frac{\partial B_{123n}}{\partial Z_n} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_{131n}}{\partial Z_n} &= \frac{1}{2} \frac{R_n}{r} \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) & \frac{\partial B_{132n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{133n}}{\partial Z_n} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial r} \right) \\
 \frac{\partial B_{221n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{222n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{223n}}{\partial Z_n} &= 0 \\
 \frac{\partial B_{231n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{232n}}{\partial Z_n} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) & \frac{\partial B_{233n}}{\partial Z_n} &= 0 \\
 \frac{\partial B_{331n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{332n}}{\partial Z_n} &= 0 & \frac{\partial B_{333n}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

On constate qu'il faut déterminer les dérivées $\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \right)$. Si on tient compte de la correspondance existant entre l'espace de référence ξ et l'espace réel x on peut écrire:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

avec $\frac{\partial \xi}{\partial x} = J^{-1}$ où J représente la matrice Jacobienne (voir l'Annexe 4). Partant de la relation $JJ^{-1} = I$ (I la matrice unité) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial X} (J^{-1}) = J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial X} \right) J^{-1}$$

où:

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

Ainsi on a:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_n}{\partial \xi} J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial X} \right) J^{-1}$$

où les composantes $\frac{\partial J}{\partial X}$ s'expriment par:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{11}}{\partial R_n} &= \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right) = \frac{R_n}{r} \left(\frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right) - \frac{R_n N_n}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial R_n} &= \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = \frac{R_n}{r} \left(\frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right) - \frac{R_n N_n}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial J_{21}}{\partial R_n} &= \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0 & \frac{\partial J_{22}}{\partial R_n} &= \frac{\partial}{\partial R_n} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0 \\
 \frac{\partial J_{11}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right) = 0 & \frac{\partial J_{12}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = 0 \\
 \frac{\partial J_{21}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{22}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial N_n}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

ANNEXE 8

CALCUL DES DÉRIVÉES DES ÉLÉMENTS DE VOLUME $d\Omega$ ET DE SURFACE dS PAR RAPPORT AUX COORDONNÉES GÉOMÉTRIQUES

En utilisant le jacobien de volume J et de surface J^s (voir l'Annexe 4), les éléments de volume et de surface sont exprimés par:

$$\begin{cases} d\Omega = 2\pi r_h |J| d\xi d\eta \\ dS = 2\pi r_h |J^s| d\eta \end{cases}$$

Ainsi les dérivées par rapport aux coordonnées géométriques nodales s'écrivent:

$$\begin{cases} d\Omega' = 2\pi \frac{\partial r_h}{\partial X} |J| d\xi d\eta + 2\pi r_h \frac{\partial |J|}{\partial X} d\xi d\eta \\ dS' = 2\pi \frac{\partial r_h}{\partial X} |J^s| d\eta + 2\pi r_h \frac{\partial |J^s|}{\partial X} d\eta \end{cases}$$

En utilisant l'interpolation spatiale définie par (3.33) et (3.34) on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial r_h}{\partial R_n} = \frac{R_n N_n}{r_h} & \frac{\partial r_h}{\partial Z_n} = 0 \\ \frac{\partial z_h}{\partial R_n} = 0 & \frac{\partial z_h}{\partial Z_n} = N_n \end{cases}$$

Il reste donc à déterminer $\frac{\partial |J|}{\partial X}$ et $\frac{\partial |J^s|}{\partial X}$.

Partant des relations de définition de $|J|$ (voir Annexe 4) on obtient:

$$\frac{\partial |J|}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} (J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12})$$

En utilisant les expressions des dérivées des éléments de la matrice jacobienne J (voir Annexe 6) on peut écrire:

$$\frac{\partial J}{\partial R_n} = \frac{\partial J_{11}}{\partial R_n} J_{22} - \frac{\partial J_{12}}{\partial R_n} J_{21}$$

$$\frac{\partial J}{\partial Z_n} = \frac{\partial J_{22}}{\partial Z_n} J_{11} - \frac{\partial J_{21}}{\partial Z_n} J_{12}$$

Pour le terme surfacique $|J^s|$ on obtient:

$$\frac{\partial |J^s|}{\partial X} = \frac{J_1^s \frac{\partial J_1^s}{\partial X} + J_2^s \frac{\partial J_2^s}{\partial X}}{|J^s|}$$

Donc si on tient compte que $\frac{\partial J_2^s}{\partial R_n} = 0$ et $\frac{\partial J_1^s}{\partial Z_n} = 0$ on a:

$$\frac{\partial |J^s|}{\partial R_n} = \frac{J_1^s \frac{\partial J_1^s}{\partial R_n}}{|J^s|}$$

$$\frac{\partial |J^s|}{\partial Z_n} = \frac{J_2^s \frac{\partial J_2^s}{\partial Z_n}}{|J^s|}$$

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE 1

- [AVENAS, 1976] Avenas P., Baudalet B., Parnière P., Sertour G. et Zaoui A. - "Mise en forme des métaux et alliages", Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1976.
- [ADAMCZYK, 1995] Adamczyk J., Carsi M., Kozic R., Wusatovski R. - "Structure evolution during hot deformation of a C-Mn-V-N steel grade", Journal of Materials Processing Technology, 53, pp. 15-22, 1995.
- [BAUDIN, 1988] Baudin T.- "Comportement et endommagement d'aciers sous sollicitations combinées de traction-torsion", Thèse de Docteur en Sciences et Génie des Matériaux, CEMEF, ENSMP, Sophia Antipolis, 1988.
- [BENSAHA, 1994] Bensaha R., Metauer G. - "Etude par essai de torsion à chaud de l'influence de l'état initial sur les comportements mécanique et métallurgique de l'acier XC42", Révue de Métallurgie, pp. 639-646, avril 1994.
- [CAILLET, 1994] Caillet D. - "Rhéologie: essais mécaniques d'identification du comportement", Séminaire de plasticité: Eléments Finis et mise en forme des métaux, CEMEF, ENSMP, Sophia-Antipolis, tome 1, chapitre 3, 1994.
- [CINGARA, 1992] Cingara A., McQuenn H.J. - "New method for determining sinh constitutive constants for high temperature deformation of 300 austenitic steels", Journal of Materials Processing Technology, 36(1), pp. 17-30, 1992.
- [CINGARA, 1992] Cingara A., McQuenn H.J. - "New formula for calculating flow curves from high temperature constitutive data for 300 austenitic steels", Journal of Materials Processing Technology, 36(1), pp. 31-42, 1992.
- [ESTRIN, 1984] Estrin Y. and Mecking H. - "A unified phenomenomological description of work hardening and creep based on one-parameter model", Acta Metall., 32(1), pp. 57-70, 1984.
- [FORCELESSE, 1993] Forcelesse A., Gabrielli F., Micari F., Zurla O.- "Computer Simulation of Metal Flow in the hot upsetting of a high-strength", Journal of Materials Processing Technology, 39(1-2), pp. 83-99, 1993.
- [FUENTES, 1993] Fuentes M., Sevillano J.G. - "Recrystallization'92", Trans Tech Publications Edition, 1993.

- [GRÄBER, 1990] Gräber A., Pöhlndt K. - "State of the art of the torsion test determining flow stress", Metal Working - Steel Research, 61 (5), pp. 212-218, 1990.
- [HIRT, 1989] Hirt G., Altan T. - "Metal flow in compression of tubular parts: predictions made with different computer programs and effect of flow stress data", Metal Working - Steel Research, 60 (5), pp. 201-207, 1989.
- [HUILIN, 1994] Huilin X., Wang Z.R. - "A study of the methods for measuring m and n values of superplastic materials", Journal of Materials Processing Technology, 41(4), pp. 399-407, 1994.
- [INGOLF, 1991] Ingolf J. - "Application-oriented modelling of hot yield strength of metallic materials", Metal Working - Steel Research, 62 (10), pp. 441-446, 1991.
- [JONAS, 1975] Jonas J.J., Mc Queen H.J. - "Recovery and Recrystallisation during high temperature deformation", Treatise on Materials Science and Technology, vol. 6, pp. 394-490, Academic Press Edition, New York, 1975.
- [KASPAR, 1993] Kaspar Radko, Müller P.M., Philipp F.D. and Backmann G. - "Hot stress - strain curves of steel determined by different kinds of deformation", Metal Working - Steel Research, 64 (12), pp. 611-617, 1993.
- [KHODDAM, 1995] Khoddam S., Lam Y.C., Thomson P.F. - "The effect of specimen geometry on the accuracy of the constitutive equation derived from the hot torsion test", Metal Working - Steel Research, 66 (2), pp. 45-48, 1995.
- [KOPP, 1988] Kopp R., Mauro Moraes de Souza, Claus-Michael Rogall - "Influence of flow stress accuracy on the result of metal forming processes", Metal Working - Steel Research, 59 (1), pp. 25-30, 1988.
- [KOPP, 1992] Kopp R., Philipp F.D. - "Physical parameters and boundary conditions for the numerical simulation of hot forming processes", Metal Working - Steel Research, 9, pp.392-398, 1992.
- [LAASRAOUI, 1991] Laasraoui A., Jonas J.J. - "Prediction of Steel Flow Stresses at High temperatures and Strain Rates", Metallurgical Transactions A, 22A, pp. 1545-1558, 1991.
- [LUIG, 1990] Luig Hermann - "The influence of specimen size and strain rate on the determination of stress-strain curves", Metal Working - Steel Research, 61 (1), pp. 21-25, 1990.
- [MEDINA, 1992] Medina S.F., Hernandez C.A. - "Modélisation mathématique des courbes contrainte-deformation des aciers. Application au calcul des forces de laminage à chaud", Mémoires et Etudes Scientifiques Revue de Métallurgie, pp. 217-223, avril 1992.
- [MECKING, 1981] Mecking H., Kocks U.F. - "Kinetic of flow and strain-hardening", Acta Metallurgica, 29, pp. 1865-1875, 1981.

- [Mc QUEEN, 1993] Mc Queen H.J.- "Metal forming: industrial, mechanical computational and microstructural", Journal of Materials Processing Technology, 37(1-4), pp. 3-36, 1993.
- [Mc QUEEN, 1995] Mc Queen H.J., Yue S., Ryan N.D. and Fry E. - "Hot working characteristic of steels in austenitic state", Journal of Materials Processing Technology, 53, pp. 293-310, 1995.
- [ROUCOULES, 1994] Roucoules C., Boyadjev I., Hodgson P.D., Parker B.A. - "Use of lead to develop models for the deformation behaviour of steel at elevated temperatures", Journal of Materials Processing Technology, 45(1), pp. 447-452, 1994.
- [SCHMITT, 1995] Schmitt J.H., Fabregue P., Thomas B.J. - "Recristallisation Dynamique dans les aciers", Journal de Physique IV, colloque C3, supplément au Journal de Physique III, 5, pp. 152-163, 1995.
- [SELLARS, 1966] Sellars C.M. et Tegart Mc G. W.J - "La relation entre la résistance et la structure dans la déformation à chaud", Mém. Sci. Rev. Mat, 63, pp. 731-746, 1966.
- [SHLOMCHACK, 1994] Shlomchack G.G., Mamuzic I., Vodopivec F. - "Rheological similarity of metals and alloys", Journal of Materials Processing Technology, 40, pp. 315-325, 1994.
- [VANDECASTELLE, 1988] Vandecastelle B., Rizzi N., Wadier J.F.- "Mechanical behavior under hot deformation of Titanium and its alloys", Sixth World Conference on Titanium, pp. 1325-1337, 1988.
- [VOCE, 1948] Voce E.- "A practical strain-hardening function", Acta Metallurgica, 51, pp. 219-226, 1948.

CHAPITRE 2

- [ABID, 1993] Abid S., Batoz J.L., Lenoir C.K., Domaszewski M., Lardeur P. - "Optimisation d'épaisseur de structures composites avec non linéarités géométriques", Actes du Colloque National en Calcul des structures, pp.802- 811, 1993.
- [ALEXANDROU, 1989] Alexandrou A.N., Anturkar N.R., Papanastasiou T.C. - "An Inverse Finite Element Method With an application to Extrusion With solidification", International Journal for numerical methods in fluids, 9, pp 541-555, 1989.
- [ALEXANDROU, 1990] Alexandrou A.N. - "An Inverse Finite Element Method for Directly Formulated Free and Moving Boundary Problems", Heat Transfer, pp.150-163, 1990.
- [BATES, 1988] Bates D.M., Watts D.G. - "Nonlinear Regression Analysis and Its Applications", John Wiley&Sons, 1988.

- [BECK, 1974] Beck J.V., Arnold K.J. - "Parameter Estimation in Engineering and Science", Ed. John Wiley & Sons, 1977.
- [BOCHAROV, 1994] Bocharov G.A., Romanyukha A.A. - "Numerical treatment of the parameter identification problem for delay-differential systems arising in immune response modelling", *Applied Numerical Mathematics*, 15, pp. 307-326, 1994.
- [BONEILL, 1993] Boneill C., Jezequel L., Mizzi J.P., Marquet P. - "Identification paramétrique des tampons d'accostage de TGV", *Actes du Colloque National en Calcul des structures*, pp.812- 822, 1993.
- [BONNET, 1991] Bonnet M. - "Identification et Contrôle par équations intégrales de frontière et variation de domaine", *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, 4, pp.25-36, 1991.
- [BONNET, 1992] Bonnet M. - "Un aperçu des approches existantes pour la description mathématique et la résolution des problèmes inverses", *Note interne 14, Laboratoire de Mécanique des Solides*, 1989 (reactualisation 1992).
- [CAILLETAUD, 1993] Cailletaud G., Pilvin P. - "Identification, problèmes inverses: un concept modulaire", *Actes du Colloque National en Calcul des structures*, pp.770- 787, 1993.
- [CONSTANTINESCU, 1993] Constantinescu A. - "Une approche numérique pour l'identification des matériaux élastique", *Actes du Colloque National en Calcul des structures*, pp.823- 832, 1993.
- [CHAU, 1991] Chau T.H., Morilhat P., Maye J.P. - "Méthodes inverses en thermomécanique: application à un cas industriel", *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, 4, pp.13-23, 1991.
- [CHENG, 1992] Cheng J.M., Yeh W.G. - "A proposed quasi-Newton Method for parameter identification in a flow and transport system", *Advances in Water Resources*, 15, pp. 239-249, 1992.
- [COLLINS, 1974] Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. - "Statistical Identification of Structures" *AIAA Journal*, 12(2), pp.185-190, 1974.
- [COTTIN, 1984] Cottin N., Felgenhauer H. P., Natke H.G. - "On the parameter identification of elastomechanical system using input and output residuals" *Ingenieur Archiv* 54 (12), pp.378-387, 1984.
- [DANTZIG, 1993] Dantzig J.A., Tieler M., Tortorelli D.A. - "Optimal design and inverse problems in solidification", *Proceedings of the sixth conference in a series on Modeling Casting and Welding Processes*, held in Palm Coast Florida, 21-26 March, 1993.
- [DWIVEDI, 1992] Dwivedi J.P., Upadhyay P.C., Das Talukder N.K. - "Parametric Assessment of Torsional Springback in Members of Work-Hardening Materials", *Computers&Structures*, 45(3), pp. 421-429, 1992.

- [ELYUKHIN, 1991] Elyukhin V.A., Kholpanov L.P. - "Statistical Parameter Estimation in Identification Problems", Theoretical Foundations of Chemical Engineerings, 24 (6), pp. 529-538, 1990.
- [FONTAINE, 1992] Fontaine J.F. - "The torsion-tensile testing method for the characterization of cold metal formability", Journal of Materials Processing Technology, 32(1-2), pp. 253-262, 1992.
- [GILL, 1981] Gill P.E., Murray W., Wright M.H. - "Practical Optimization", Ed. Academic Press, London, 1981.
- [GOODSON, 1974] Goodson R.E., Polis M.P. - "Parameter Identification in distributed Systems: A Synthesising overview", Joint Automatic Control, Conference, INSPEC CA, pp.1-30, 1974.
- [KANG, 1993] Kang S., Zabarar N. - "On the optimisation of Residual stresses in a unidirectional Casting Process, Proceedings of the sixth conference in a series on Modeling Casting and Welding Processes, held in Palm Coast Florida, 21-26 March, 1993.
- [KRISHNAN, 1993] Krishnan S., Barton G.W., Perkins J.D. - "Robust Parameter Estimation in on- line optimisation- Part I. Methodology and simulated case study", Computers chem. Engng., 16(6), pp.545-562, 1992.
- [LADEVEZE, 1991] Ladeveze P., Reynier M., Berger H., Ohayon R., Quetin F., Barthe L. - "Méthodes de recalage de modèles de structures en dynamique: les approches par réaction dynamique et par la notion d'erreure en relation de comportement", Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, 4, pp.49-60, 1991.
- [LADEVEZE, 1992] Ladeveze P. - "Fiabilité et contrôle de modèles", Revue européenne des éléments finis, 1(1), 1992.
- [LAHOTI, 1975] Lahoti G.D., Altan T. - "Prediction of Temperature Distributions in Axisymmetric Compression and Torsion", Journal of Engineering Materials and Technology, pp. 113-120, april 1975.
- [LALLEMENT, 1991] Lallement G., Andriambololona R. - "Approche par minimisation sur les sorties pour le recalage de modèles de structure et optimisation des essais", Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, 4, pp.61-75, 1991.
- [LEE, 1991] Lee G.G., Yun C.B. - "Parameter Identification of Linear Structural Dynamic System", Computers&Structures, 40(6), pp.1475-1487, 1991.
- [LEGAT, 1993] Legat V., Marchal J.M. - "Die design: an implicit formulation for the inverse problem", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 16, pp. 29-42, 1993.
- [LUND, 1990] Lund J. and Vogel C.R. - "A fully- Galerkin method for the numerical solution of an inverse problem in a parabolic partial differential equation", Inverse Problems 6, pp.205-217, 1990.

- [MACQUEENE, 1981] Macqueene J.W., Akau R.L., Krutz G.W., Schoenhals R.J. - "Development of Inverse Finite Element Techniques for Evaluation of Measurements obtained from Welding Process", Numerical Properties and Methodologies in Heat Transfer, pp.149-164, 1981.
- [MANOACH, 1989] Manoach E., Karagiozova D., Hadjиков L. - "An Inverse Problem for an Initially Heated Circular Plate under a Pulse Loading", Zeischrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 71(10), pp.413-416, 1992.
- [MEHTA, 1990] Mehta R.C. and Jayachandran T. - "Determination of heat transfer coefficient using transient temperature response chart", Warme- und Stoffubertragung, 26, pp.1-5, 1990.
- [MINKOWYCZ, 1988] Minkowycz W.J., Sparrow E.M., Schneider G.E., Pletcher R.H. - "Handbook of Numerical Heat Transfer", John Wiley&Sons, Inc., 1988.
- [MYSLINSKI, 1993] Myslinski A., Piekarski J., Pousselet B. - "Poutre courbe en grands déplacements, sensibilité par rapport à la ligne moyenne", Actes du Colloque National en Calcul des structures, pp.788- 801, 1993.
- [NORTON, 1986] Norton J.P. - "An Introduction to Identification", Ed. Academic Press, London, 1986.
- [OBLAK, 1993] Oblak M.M., Kegl M., Butinar B.J. - "An Approach to Optimal Design of Structures with non-linear response", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, pp. 511-521, 1993.
- [OMATU, 1991] Omatu S., Matumoto K. - "Distributed Parameter Identification by Regularization and its application to prediction of air pollution", Int. J. Systems SCI, 22(10), pp. 2001-2012, 1991.
- [OUDSHOORN, 1991] Oudshoorn A., Ravalard Y. - "Optimisation sous contraintes des structures d'avant- projets", StruCoMe, pp.582-593, 1991.
- [RAUCH, 1985] Rauch E., Canova G.R., Jonas J.J. and Semiatin S.L. - "An analysis of flow localization during torsion testing", Acta Metall., 33(3), pp. 465-476, 1985.
- [REPACI, 1990] Repaci A., Vacca M.T. - "Parameter Identification By Solution of Inverse Problem Referred to Mathematical Models of Continuum Physics", Mathl.Comput.Modelling, 13(2), pp.79-84, 1990.
- [REYNIER, 1996] Reynier M., Nedjar B. - "Damage detection on elastic beams: linear and non linear formulation", Proceedings of 2nd Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering: theory and practice, Croisic, France, 1996.
- [RÖDIC, 1992] Rödic T., Owen D.R.J., Shonauer M., Tercelj M., Gurrmert H. - "Inverse identification and reconstruction approaches for the investigation of friction and wear in plane strain spike forming tests", Proceedings of the Third International Conference Held, in Barcelone, Spain, 6-10 April, 1992.

- [SEMIATIN, 1985] Semiatin S.L., Ayres R.A. and Jonas J.J. - "An analysis of the nonisothermal tensile test", *Metallurgical Transactions A*, 16A, pp. 2299-2308, 1985.
- [SEMIATIN, 1986] Semiatin S.L., Frey N., Walker N.D. and Jonas J.J. - "Effect of deformation heating and strain rate sensitivity on flow localization during the torsion testing of 6061 aluminium", *Acta Metall.*, 34(1), pp. 167-176, 1986.
- [SCHNUR, 1992] Schnur D.S., Zabaraz N. - "An Inverse Method for Determining elastic material properties and a material interface", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp.2039-2057, 1992.
- [SCHRAMM, 1993] Schramm U., Walter D., Pilkey D. - "Structural shape optimization for the torsion problem using direct integration and B- splines", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 107(1), pp. 251-268, 1993.
- [SUN, 1990] Sun N.Z., William W.G. - "Coupled Inverse Problems in Groundwater Modeling. 1. Sensitivity Analysis and Parameter Identification", *Water Resources Research*, 26(1), pp.2507-2525, 1990.
- [TORTORELLI, 1991] Tortorelli D.A., Michaleris P. - Design Sensitivity Analysis: Overview and Review", *Inverse Problems in Engineering*, 1, pp. 71-105, 1994.
- [TREDAFILOVA, 1994] Trendafilova I.N. - "Identification of viscoelastic materials from electro-optical displacement measurements at two sections of an impacted rod specimen", *Enr. J. Mech; A/Solids*, 13(6), pp. 793-802, 1994.
- [TIKHONOV, 1974] Tikhonov A., Arsenine V. - "Méthodes de résolution de problèmes mal posés", Ed. Mir, Moscou, 1974.
- [XIANG, 1991] Xiang J. and Elsworth D. - "Low-order finite elements for parameter identification in groundwater flow", *Appl. Math. Modeling*, 15, pp.257-266, 1991.
- [YATHEENDHAR, 1993] Yatheendhar M., Belegundu A.D. - "Analytical Shape Sensitivity by Implicit Differentiation for General Velocity Fields", *Computers&Structures*, 46(4), pp. 617-623, 1993.
- [YEH, 1983] Yeh W.G., Yoon Y.S., Lee K.S - "Aquifer Parameter Identification with Kriging and Optimum Parameterization", *Water Resources Research*, 19(1), pp. 225-233, 1983.
- [ZHANG, 1987] Zhang Q., Lallement G., Fillod R., Piranda J. - "A complete procedure for the ajustement of a mathematical model from the identified complex modes", Imperial College, London, 6-9 Avril 1987.
- [WEI, 1989] Wei J.C., Zhang Q., Allemang P.J., Wei M.L.- "Correction of Finite Element Model via Selected Physical Parameters", *Proccedings IMAC*, pp. 1231-1238, 1989.

CHAPITRE 3

- [BREZZI, 1974] Brezzi F. - "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers", R.A.I.R.O., R2, pp.129-151, août 1974.
- [BRONOWICKI, 1986] Bronowicki A.J., Lurich M.S., Kuritz S.P. - "Application of Physical Parameter Identification to Finite Element Models", First NASA/DOD CSI Technology Conference, Norfolk-Virginia, pp. 187-206, 18-21 november 1986.
- [CESCUTTI, 1989] Cescutti J.P. - "Contribution à la simulation numérique du forgeage", Thèse de Docteur en Sciences et Génie des Matériaux, CEMEF, ENSMP, Sophia Antipolis, 1989.
- [COLLINS, 1974] Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. - "Statistical Identification of Structures" AIAA Journal, 12(2), pp.185-190, 1974.
- [FOURMENT, 1992] Fourment L. - "Estimateur d'erreur et maillage adaptatif pour la simulation numérique des procédés de mise en forme", Thèse de Docteur en Sciences et Génie des Matériaux, CEMEF, ENSMP, Sophia Antipolis, 1992.
- [GELIN, 1994] Gelin J.C., Ghouati O. - "An Inverse Method for Determining Viscoplastic Properties of aluminium alloys", Journal of Materials Processing Technology, 45 (1), pp. 435-440, 1994.
- [HENDRIKS, 1990] Hendriks M., OOMENS C., Janson J. - "A Hybrid Method to determine Material Parameters of Composites", Mechanical identification of Composites proceedings of European Mechanics- Colloquium, pp. 75-81, 1990.
- [HIRT, 1989] Hirt G., Altan T. - "Metal flow in compression of tubular parts: predictions made with different computer programs and effect of flow stress data", Metal Working - Steel Research, 60 (5), pp. 201-207, 1989.
- [HOSHIYA, 1993] Hoshiya M. - "Kalman Filter- finite element Method in identification", Journal of engineering mechanics, 119, pp.197-210, 1993.
- [JORDAN, 1993] Jordan E.H., Shi S., Walker K.P. - "The Viscoplastic Behaviour of Hastelloy- X Single Crystal", International Journal of Plasticity, 9, pp. 119-139, 1993.
- [KHODDAM, 1995] Khoddam S., Lam Y.C., Thomson P.F. - "The effect of specimen geometry on the accuracy of the constitutive equation derived from the hot torsion test", Metal Working - Steel Research, 66 (2), pp. 45-48, 1995.
- [KOPP, 1992] Kopp R., Philipp F.D. - "Physical parameters and boundary conditions for the numerical simulation of hot forming processes", Steel research, 9, pp. 392-398, 1992.
- [LEDESMA, 1991] Ledesma A., Gens A., Alonso E.E. - "Identification of parameters of nonlinear geotechnical models", Computer Methods and Advanced in Geomechanics, pp. 1005-1010, 1991.

- [MAHNKEN, 1994] Mahnken R. and Stein E. - "The identification of parameters for viscoplastic models via finite-element methods and gradient methods", *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2, pp. 597-616, 1994.
- [MOAL, 1992] Moal A. - "Modélisation numérique par la méthode des éléments finis du soudage par friction inertielle", Thèse de Docteur en Sciences et Génie des Matériaux, CEMEF, ENSMP, Sophia Antipolis, 1992.
- [SCHNUR, 1992] Schnur D.S., Zabaras N. - "An Inverse Method for Determining elastic material properties and a material interface", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp.2039-2057, 1992.
- [SCHWIBINGER, 1986] Schwibinger P., Nordmann R. - "Improvement of a Reduced Torsional Model by Means of Parameter Identification", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 111(1), pp. 17-26, 1989.
- [SOYRIS, 1990] Soyris N.M. - "Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud", Thèse de Docteur en Sciences et Génie des Matériaux, CEMEF, ENSMP, Sophia Antipolis, 1990.
- [ZHANG, 1987] Zhang Q., Lallement G., Fillod R., Piranda J. - "A complete procedure for the adjustment of a mathematical model from the identified complex modes", Imperial College, London, 6-9 Avril 1987.
- [WEI, 1989] Wei J.J.C., Zhang Q., Allemang P.J., Wei M.L. - "Correction of Finite Element Model via Selected Physical Parameters", *Proceedings IMAC*, pp. 1231-1238, 1989.

CHAPITRE 4

- [CAILLET, 1994] Caillet D. - "Rhéologie: essais mécaniques d'identification du comportement", Séminaire de plasticité: Eléments Finis et mise en forme des métaux, CEMEF, ENSMP, Sophia-Antipolis, tome 1, chapitre 3, 1994.
- [GAVRUS, 1996] Gavrus A., Massoni E., Chenot J.L. - "A rheological parameter identification using a finite element simulation of the tensile test", *Proceedings of 2nd Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering: theory and practice*, Croisic, France, 1996.
- [GAVRUS, 1996] Gavrus A., Massoni E., Chenot J.L. - "Thermoviscoplastic parameter identification using a computer aided rheology method for torsion-tensile test analysis", *The 5th Int. Conf. on Technology of Plasticity*, Columbus, Ohio, USA, 1996.
- [G'SELL, 1983] G'Sell C., Aly-Helal N.A., Jonas J.J. - "Effects of stress triaxiality on neck propagation during the tensile stretching of solid polymer", *J. Mater. Sci.*, 18, pp. 1731-1742, 1983.

CHAPITRE 5

- [GAVRUS, 1994] Gavras A., Massoni E., Chenot J.L. - "Computer aided rheology for non linear large strain thermo-viscoplastic behaviour formulated as an inverse problem", The Second International Symposium on Inverse Problems (ISIP), Paris (France), A. A. Balkema Edition, pp.123-130, 2-4 novembre 1994.
- [GAVRUS, 1995] Gavras A., Massoni E., Chenot J.L. - "Computer aided rheology for constitutive parameter identification", The Fourth International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS), Barcelone (Spain), Pineridge Press Edition, pp.755-766, 3-6 april 1995.
- [GAVRUS, 1995] Gavras A., Massoni E., Chenot J.L. - "Constitutive parameter identification using a Computer Aided Rheology approach", The Fifth International Conference on Numerical Method in Industrial Forming Processes (NUMIFORM), Ithaca (USA), A. A. Balkema Edition, pp. 563-568, 18-21 juin 1995.
- [GAVRUS, 1996] Gavras A., Massoni E., Chenot J.L. - "An inverse analysis using a finite element model for a rheological parameter identification", Journal of Materials Processing Technology, 60, pp. 447-454, 1996.
- [GAVRUS, 1996] Gavras A., Massoni E., Chenot J.L. - "An inverse finite element analysis applied to viscoplastic parameter identification", Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering, Paris, France, 9-13 september 1996, John Wiley&Sons Edition, pp. 999-1005.
- [GAVRUS, 1996] Gavras A., Tillier Y., Billon N., Massoni E. - "Identification des paramètres rhéologiques par l'analyse inverse d'un modèle éléments finis", à paraître dans les Cahiers de Rhéologie, GFR, 1996.
- [G'SELL, 1988] G'Sell C. - "Instabilités de déformation pendant l'étirage des polymères solides", Revue de Physique Appliqué, 23, pp. 1085-1101, 1988.
- [TILLIER, 1995] Tillier Y. - "Détermination des lois de comportement applicables aux polymères solides. Méthode d'identification", mémoire, Ecole des Mines de Paris, CEMEF, mars 1995.
- [TILLIER, 1995] Tillier Y. - "Identification des lois de comportement applicables aux polymères solides. Première approche", mémoire, Ecole des Mines de Paris, CEMEF, juin 1995.

RESUME

L'amélioration de la connaissance du comportement rhéologique des matériaux au cours de leur mise en forme passe nécessairement par une meilleure compréhension des essais rhéologiques de laboratoires. C'est pourquoi nous avons développé un modèle inverse d'identification des paramètres rhéologiques, résultant du couplage d'un code de simulation par éléments finis de l'essai avec un module d'optimisation.

Le modèle direct de simulation concerne plus particulièrement les tests axisymétriques de torsion, traction et traction-torsion. Il permet une modélisation plus réaliste de l'essai, notamment en ce qui concerne la possibilité de prendre en compte les phénomènes d'auto-échauffement, de localisation de la déformation et d'adoucissement, qui rendent souvent les hypothèses de dépouillement classiques non valables.

Le principe d'identification repose sur la détermination des coefficients de la loi de comportement qui minimiseront une fonction coût, exprimant au sens de moindres carrés, l'écart entre le calcul et l'expérience. L'utilisation d'un algorithme de minimisation de type Gauss-Newton nous a amené à développer un calcul de sensibilité paramétrique à partir d'une différentiation analytique des équations discrètes définissant le calcul de simulation.

Ainsi, le logiciel d'identification permet d'identifier automatiquement et simultanément les paramètres rhéologiques d'une loi thermo-viscoplastique de type Norton-Hoff, avec une formulation généralisée de la consistance du matériau afin d'obtenir une description adéquate de la compétition existant entre l'écrouissage et l'adoucissement.

MOTS CLÉS: Essais Rhéologiques, Comportement Thermo-Viscoplastique, Simulation Eléments Finis, Analyse Inverse, Identification de Paramètres, Calcul de Sensibilité, Différentiation Directe

ABSTRACT

The improvement of the knowledge of the material behaviour during the industrial forming processes come necessarily through a better understanding of the experimental rheological test. We have developed an inverse numerical model for the rheological parameter identification coupling a finite element simulation code of the rheological test with an optimization procedure.

The direct model simulates the axisymmetric tests corresponding to the torsion, tensile and tensile-torsion one. It leads to more realistic modelling of the rheological test, in order to ensure the possibility to take into account the self-heating phenomena, the strain localisation and the softening effects, for which the classical computational assumptions are not more valid.

The identification principle is based on finding the coefficients of the behaviour law which minimise a cost function, defining in the least squares sense, the deviation between the computation and the experiment. The use of a Gauss-Newton minimisation method, leads us to develop a parameter sensitivity computation, starting from an analytical differentiation of the discretized equations which define the simulation model.

Thus, the identification code permits to identify automatically and simultaneously all the rheological parameters of a thermo-viscoplastic Norton-Hoff law, with a generalized formulation of the material consistency in order to obtain an appropriate description of the competition between the hardening and the softening effects.

KEYWORDS: Rheological Tests, Thermo-Viscoplastic Behaviour, Finite Element Simulation, Inverse Analysis, Parameter Identification, Sensitivity Computation, Direct Differentiation Method